Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 84, 2015, p. 131 - 139

Manuscrit reçu le 9 juin 2013 et accepté le 2 juin 2015

ALGORITHME DE ROBBINS-MONRO À VARIABLES ASSOCIÉES

SAMIR RAHMANI ET ABDELNASSER DAHMANI

Résumé. Dans ce travail, nous établissons des inégalités exponentielles pour l'algorithme de Robbins-Monro à variables associées, et on précise la vitesse de convergence presque complète (p.co) de cet algorithme.

Abstract. In this work, we establish exponential inequalities for the Robbins-Monro's algorithm with associated variables, and we precise the almost complete (a.co) convergence rate of this algorithm.

Mots-Clés : Algorithme de Robbins-Monro, variables associées, convergence.

Key-words : Robbins-Monro's algorithm, associated variables, convergence.

AMS Subject Classification : 60E15-60F15-62L20

1. Introduction

Les méthodologies connues sous le terme d'approximations stochastiques, recouvrant un ensemble de techniques permettant d'estimer la solution d'une équation réelle, sont nées des travaux de Robbins et Monro [6] qui étudièrent le problème suivant. Soit f une fonction numérique à valeurs réelles et θ la solution unique de l'équation

$$f(x) = \beta \tag{1}$$

où β est une constante connue. Le problème posé est d'estimer θ. Des méthodes numériques existent pour approximer θ quand f est une fonction connue. Robbins et Monro ont considéré une situation dans laquelle, en dehors de quelques propriétés générales, f est inconnue mais, pour chaque point x, on dispose d'une variable aléatoire $\Phi(x, \xi)$ telle que

$$f(x) = E\left(\Phi(x, \xi)\right) \tag{2}$$

où ξ est une variable aléatoire de moyenne nulle. Ces auteurs ont montré que l'on pouvait construire une séquence adaptive de variables aléatoires $(X_n)_n$ qui estime θ de façon consistante. L'étude de la convergence presque sûre de l'algorithme stochastique de Robbins-Monro a été amorcée par Blum dans le cadre d'erreurs aléatoires indépendantes et identiquement distribuées [1]. En [5], Duflo a généralisé cette étude

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 84, 2015, p. 131 - 139

au cas multivarié. Concernant le cas général non linéaire, une procédure de type Robbins-Monro a été introduite par Venter [17] et était discutée dans [2].

2. Algorithme et étude asymptotique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction connue juste sous une mesure $\Phi(x, \xi)$ avec une erreur de mesure ξ. Pour estimer la solution θ de l'équation (1), Robbins et Monro [6] ont construit leur algorithme de manière récursive, en fixant une valeur initiale X_1 et en définissant par récurrence :

$$X_{n+1} = X_n - a_n \left(\Phi(X_n, \xi_n) - \beta\right) \tag{3}$$

où $(\xi_n)_n$ est une suite de variables aléatoires réelles centrées, $(a_n)_n$ une suite déterministe décroissante vers 0 et telle que

$$a_n = \frac{a}{n} \ (a > 0), \ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 < +\infty \tag{4}$$

et

$$\Phi(X_n, \xi_n) = f(X_n) + \xi_n.$$

Sans restreindre de généralité, on suppose que $\beta = 0$.
En retranchant θ aux deux membres de l'égalité (3) et par itérations successives, l'algorithme (3) peut s'écrire sous la forme

$$|X_{n+1} - \theta| = \left| \prod_{k=1}^{n} \left(1 - a_k \frac{f(X_k)}{X_k - \theta}\right) \right| \left| (X_1 - \theta) - \sum_{i=1}^{n} Z_i \right| \tag{5}$$

où

$$Z_i = a_i \prod_{k=1}^{i} \left(1 - a_k \frac{f(X_k)}{X_k - \theta}\right)^{-1} \xi_i. \tag{6}$$

Par ailleurs, notons $(u(n))_n$ la suite réelle définie par :

$$u(n) = \sup_{i \geq 1} \sum_{j : j - i \geq n} cov\left(Z_i, Z_j\right). \tag{7}$$

Afin d'établir les inégalités exponentielles, on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées.
(H1) Le paramètre θ vérifie a priori

$$|X_1 - \theta| \leq H < +\infty. \tag{8}$$

(H2) f est une fonction réelle satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \{1, \cdots, n\}, \ 0 < m \leq \frac{f(x)}{x - \theta} < \frac{k}{a} < +\infty. \tag{9}$$

(H3) Nous supposons que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\varphi_n(\varepsilon) = n^{am} \exp\left(am\gamma\right) \varepsilon - H > 0 \tag{10}$$

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 84, 2015, p. 131 - 139

où γ est la constante d'Euler.
(H4) Par ailleurs, on note que si les erreurs aléatoires ξ_i sont associées de moyenne nulle alors les variables aléatoires Z_i sont aussi associées telles que

$$E(Z_i) = 0 \quad \text{et} \quad \max_{1 \leq i \leq n} |Z_i| \leq c_n < +\infty \quad p.s. \tag{11}$$

(H5) Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers positifs et soit $t > 0$ tel que $0 < tp_n c_n \leq 1$. Si $p_n \leq n/(\alpha \log n)$ pour tout $\alpha > 0$, $p_n \to +\infty$, alors il existe une constante positive C, telle que

$$\frac{\log n}{n^{\alpha/2} p_n c_n^2} \exp\left(\left(\frac{\alpha n \log n}{p_n}\right)^{1/2}\right) u\left(p_n\right) \leq C < +\infty. \tag{12}$$

Pour montrer le théorème de la section suivante, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 1. [8] *Soit $(\xi_i,\ i = 1, \cdots, n)$ une suite de variables aléatoires associées telles que $|\xi_i| \leq M < +\infty$ p.s. Alors pour tout $t > 0$,*

$$|E \exp(t \sum_{i=1}^{n} \xi_i) - \prod_{i=1}^{n} E \exp(t\xi_i)| \leq t^2 \exp\left(ntM\right) \sum_{1 \leq i < j \leq n} cov\left(\xi_i, \xi_j\right).$$

3. Résultats

Théorème 2. *Sous les hypothèses (H1)-(H5) et pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$P\left\{|X_{n+1} - \theta| > \varepsilon\right\} \leq Cn^{-\alpha/4}. \tag{13}$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité $\log\left(1 - x\right) \leq -x$, $(0 < x < 1)$ et l'hypothèse (H2), on a

$$\log \prod_{k=1}^{n} \left(1 - a_k \frac{f(X_k)}{X_k - \theta}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} -a_k m = \sum_{k=1}^{n} -\frac{am}{k} = -am\left(\log n + \gamma_n\right) \tag{14}$$

où γ_n est définie par la relation

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \log n = \gamma + \left(\psi(n+1) - \log n\right) \tag{15}$$

où $\psi(.)$ est la fonction digamma.
Ensuite, il est aisé de vérifier que

$$\gamma_n - \gamma_{n-1} = \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} < 0, \tag{16}$$

pour tout $n > 1$. Ceci mène au résultat bien connu où la suite γ_n décroit vers la constante d'Euler γ, c'est-à-dire

$$\gamma_n > \gamma = \lim_{n \to +\infty} \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \log n\right\} = 0.577215... \tag{17}$$

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 84, 2015, p. 131 - 139

A partir de cette relation, nous obtenons

$$\log \prod_{k=1}^{n} \left(1 - a_k \frac{f(X_k)}{X_k - \theta}\right) \leq -am\left(\log n + \gamma\right). \tag{18}$$

Par conséquent, on a

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - a_k \frac{f(X_k)}{X_k - \theta}\right) \leq n^{-am} \exp\left(-am\gamma\right) \tag{19}$$

et alors, en utilisant (5) et les hypothèses (H1) et (H3), nous déduisons que

$$P\left\{|X_{n+1} - \theta| > \varepsilon\right\} \leq P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} Z_i\right| > \varphi_n(\varepsilon)\right\}. \tag{20}$$

Par ailleurs, pour un entier naturel n assez grand, on a

$$\frac{H}{n^{am}\exp\left(am\gamma\right)} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{21}$$

ce qui donne

$$\varphi_n(\varepsilon) = n^{am}\exp\left(am\gamma\right)\left(\varepsilon - \frac{H}{n^{am}\exp\left(am\gamma\right)}\right) > \frac{\varepsilon}{2} n^{am}, \tag{22}$$

donc, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} P\left\{|X_{n+1} - \theta| > \varepsilon\right\} &\leq P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} Z_i\right| > \frac{\varepsilon}{2} n^{am}\right\} \\ &= P\left\{|S_n| > \frac{\varepsilon}{2} n^{am}\right\} \end{aligned} \tag{23}$$

où $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$.
Pour la convenance, on définit la suite Z_{ni} par

$$Z_{ni} = \begin{cases} Z_i & \text{pour } \ 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{pour } \ i > n \end{cases}$$

Soit $r_n = [n/(2p_n)] + 1$ pour $n \geq 1$,

$$Y_{nj} = \sum_{i=2(j-1)p_n+1}^{2(j-1)p_n+p_n} Z_{ni} \quad , \quad \widehat{Y}_{nj} = \sum_{i=2(j-1)p_n+p_n+1}^{2jp_n} Z_{ni} \tag{24}$$

pour $j = 1, 2, \ldots, r_n$ et p_n est défini dans l'hypothèse (H5). On note :

$$S_{1,n} = \sum_{j=1}^{r_n} Y_{nj} \quad , \quad S_{2,n} = \sum_{j=1}^{r_n} \widehat{Y}_{nj} \tag{25}$$

Il est clair que, $n \leq 2r_n p_n \leq 2n$. Donc, on a

$$S_n = S_{1,n} + S_{2,n} \tag{26}$$

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 84, 2015, p. 131 - 139

et

$$P\left\{|S_n| > \frac{\varepsilon}{2}n^{am}\right\} \leq P\left\{|S_{1,n}| > \frac{\varepsilon}{4}n^{am}\right\} + P\left\{|S_{2,n}| > \frac{\varepsilon}{4}n^{am}\right\}. \tag{27}$$

Nous allons majorer le premier terme du second membre de l'inégalité ci-dessus.
En vertu de l'inégalité de Chernoff, pour tout $t > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} P\left\{S_{1,n} > \frac{\varepsilon}{4}n^{am}\right\} &= P\left\{\exp(tS_{1,n}) > \exp\left(\frac{t\varepsilon}{4}n^{am}\right)\right\} \\ &\leq \exp\left(-\frac{t\varepsilon}{4}n^{am}\right) E\exp(tS_{1,n}), \end{aligned} \tag{28}$$

et
(29)

$$E\exp(tS_{1,n}) \leq \left|E\exp(tS_{1,n}) - \prod_{j=1}^{r_n} E\exp(tY_{nj})\right| + \prod_{j=1}^{r_n} E\exp(tY_{nj}) = I_1 + I_2.$$

Afin de majorer I_1, notons que $|Y_{nj}| \leq p_n \max_{1\leq i\leq n} |Z_i| \leq p_n c_n$ p.s. En appliquant le lemme 1, on trouve

$$\begin{aligned} I_1 &\leq t^2\exp(tr_np_nc_n) \sum_{1\leq s<s'\leq r_n} cov(Y_{ns}, Y_{ns'}) \\ &= t^2\exp(tr_np_nc_n) \sum_{1\leq s<s'\leq r_n} cov\left(\sum_{i=2(s-1)p_n+1}^{2(s-1)p_n+p_n} Z_{ni}, \sum_{j=2(s'-1)p_n+1}^{2(s'-1)p_n+p_n} Z_{nj}\right) \\ &= t^2\exp(tr_np_nc_n) \sum_{1\leq s<s'\leq r_n} \sum_{i=2(s-1)p_n+1}^{2(s-1)p_n+p_n} \sum_{j=2(s'-1)p_n+1}^{2(s'-1)p_n+p_n} cov(Z_{ni}, Z_{nj}) \\ &\leq t^2\exp(tr_np_nc_n) \sum_{s=1}^{r_n-1} \sum_{s'=s+1}^{r_n} \sum_{i=2(s-1)p_n+1}^{2(s-1)p_n+p_n} \sum_{j=2(s'-1)p_n+1}^{2(s'-1)p_n+p_n} cov(Z_i, Z_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq r_np_nt^2\exp(tr_np_nc_n) \sup_{i\geq 1} \sum_{j:j-i\geq p_n} cov(Z_i, Z_j) \\ &= r_np_nt^2u(p_n)\exp(tr_np_nc_n) \\ &\leq t^2nu(p_n)\exp(tnc_n) \end{aligned} \tag{30}$$

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 84, 2015, p. 131 - 139

car $r_n \leq np_n^{-1}$. Puisque $0 < tp_n c_n \leq 1$, $|tY_{nj}| \leq 1$. Notons que $EY_{nj} = 0$,

$$
\begin{aligned}
E\exp(tY_{nj}) &= \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{E(tY_{nj})^s}{s!} \\
&= 1 + \sum_{s=2}^{+\infty} \frac{E(tY_{nj})^s}{s!} \leq 1 + E(tY_{nj})^2 \sum_{s=2}^{+\infty} \frac{1}{s!} \\
&\leq 1 + t^2 EY_{nj}^2 (e-2) \\
&\leq 1 + t^2 EY_{nj}^2 \leq \exp\left(t^2 EY_{nj}^2\right). \qquad (31)
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, en utilisant l'inégalité des moments dans [16]. Alors il existe une constante positive C_1 telle que

$$
\begin{aligned}
I_2 = \prod_{j=1}^{r_n} E\exp(tY_{nj}) &\leq \exp\left(t^2 \sum_{j=1}^{r_n} EY_{nj}^2\right) \\
&= \exp\left(t^2 \sum_{j=1}^{r_n} E\left(\sum_{i=2(j-1)p_n+1}^{2(j-1)p_n+p_n} Z_{ni}\right)^2\right) \\
&\leq \exp\left(C_1\ t^2 r_n p_n \{\max_{1\leq i\leq n} |Z_i|\}^2\right) \\
&\leq \exp\left(C_1\ t^2 r_n p_n c_n^2\right) \leq \exp\left(C_1\ t^2 n c_n^2\right). \qquad (32)
\end{aligned}
$$

En combinant (28)-(32), il résulte

$$
P\left\{S_{1,n} > \frac{\varepsilon}{4} n^{am}\right\} \leq \left\{t^2 nu(p_n)\exp(tnc_n) + \exp\left(C_1\ t^2 nc_n^2\right)\right\} \exp\left(-\frac{t\varepsilon}{4} n^{am}\right). \qquad (33)
$$

De manière analogue, on obtient le même majorant pour les termes :

$$
P\left\{S_{1,n} < -\frac{\varepsilon}{4} n^{am}\right\},\ P\left\{S_{2,n} > \frac{\varepsilon}{4} n^{am}\right\} \text{ et } P\left\{S_{2,n} < -\frac{\varepsilon}{4} n^{am}\right\}.
$$

Enfin, en réunissant les résultats (23) et (26) on a

$$
P\{|X_{n+1} - \theta| > \varepsilon\} \leq 4\left\{t^2 nu(p_n)\exp(tnc_n) + \exp\left(C_1\ t^2 nc_n^2\right)\right\} \exp\left(-\frac{t\varepsilon}{4} n^{am}\right). \qquad (34)
$$

D'autre part, pour $\alpha > 0$, on pose

$$
t = \left(\frac{\alpha \log n}{np_n c_n^2}\right)^{1/2}. \qquad (35)
$$

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 84, 2015, p. 131 - 139

Il est clair que $tp_nc_n \leq 1$ pour $p_n \leq n/(\alpha \log n)$ et

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{t\varepsilon}{4}n^{am}\right) &= \exp\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha \ \log n}{np_nc_n^2}\right)^{1/2} n^{am}\varepsilon\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{\alpha \ \log n}{4nc_n}n^{am}\varepsilon\right) \\ &\leq \exp\left(-q_n n^{am}\varepsilon\right) \qquad (36) \end{aligned}$$

où $q_n = [\alpha \ \log n/4nc_n] > 0$. Comme $p_n \to +\infty$, nous avons

$$\begin{aligned} \exp\left(C_1 \ t^2nc_n^2\right) &= \exp\left(C_1 \ \frac{\alpha \log n}{np_nc_n^2}nc_n^2\right) \\ &= \exp\left(C_1 \ \frac{\alpha \log n}{p_n}\right) \leq n^{\alpha/2}. \qquad (37) \end{aligned}$$

Enfin, l'hypothèse (H5), montre qu'il existe une constante positive C telle que :

$$\begin{aligned} t^2nu(p_n)\exp\left(tnc_n\right) &= \frac{\alpha \log n}{p_nc_n^2}\exp\left(\left(\frac{\alpha \log n}{np_nc_n^2}\right)^{1/2} nc_n\right)u(p_n) \\ &= \frac{\alpha \log n}{p_nc_n^2}\exp\left(\left(\frac{\alpha \ n\log n}{p_n}\right)^{1/2}\right)u(p_n) \\ &\leq C \ n^{\alpha/2}. \qquad (38) \end{aligned}$$

En insérant ces équations, (36)-(38) dans (34), on obtient le résultat désiré du théorème 2. □

Corollaire 3. *Sous les hypothèses du théorème 2, l'algorithme itératif défini en (3) converge presque complètement vers la solution θ de l'équation (1).*

Démonstration. Appliquons la règle de Cauchy à la suite réelle de termes positifs v_n où le terme général est défini par

$$v_n = Cn^{-\alpha/4} \qquad (39)$$

il résulte que, pour tout ε positif

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\left\{|X_{n+1} - \theta| > \varepsilon\right\} < +\infty \qquad (40)$$

ce qui donne le résultat. □

Corollaire 4. *Sous les hypothèses du théorème 2, nous avons*

$$X_{n+1} - \theta = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right) \quad p.co. \qquad (41)$$

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 84, 2015, p. 131 - 139

Démonstration. En choisissant $\varepsilon = 3\rho\sqrt{\frac{\log n}{n}}$ où $\rho = (\alpha\ p_n c_n^2)^{1/2}$ suffisamment large, on a

$$P\left\{|X_{n+1} - \theta| > 3\rho\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right\} \leq Cn^{-\alpha/4}. \tag{42}$$

Le terme de droite de l'inégalité précédente est celui d'une série convergente. Ce qui entraîne (41). □

Remarque 5. Pour un seuil de signification ϑ, l'inégalité (13) permet de montrer que la solution θ de l'équation (1) appartient à l'intervalle fermé de centre $X_{n(\vartheta)+1}$ et de rayon ε avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - \vartheta$.

4. Application

En termes d'applications, l'algorithme de Robbins et Monro est très utilisé en chimie. Il permet de déterminer le dosage optimal θ d'un produit chimique pour obtenir l'effet voulu ϑ. C'est pourquoi il porte aussi le nom d'algorithme de dosage.

Références

[1] J.R. Blum, *Approximation methods which converge with probability one*, Ann. Math. Stat, **25** (1954), 382-386.

[2] T.L. Lai, H. Robbins, *Adaptive design in regression and control*, Proc. Nat. Acad, Sci, USA, **75** (1978), 586-587.

[3] M.T. Wasan, *Stochastic approximation*, Cambridge, At the university press, (1969).

[4] S.C. Yang, *Moment bounds for strong mixing sequences and their application*, J. Math. Research and Exposition, **20** (2000), 349-359.

[5] M. Duflo, *Méthodes récursives aléatoires*, Masson, (1990).

[6] H. Robbins, S. Monro, *A stochastic approximation method*, Ann. Math. Stat, $N°1$, **22** (1951), 400-407.

[7] M.B. Nevelson, R.Z. Hasminskii, *Stochastic approximation and recursive estimation*, Amer. Math. Soc, Providence, R.I, (1973).

[8] P.D. Oliveira, *An exponential inequality for associated variables*, Statist Probab Lett, **73** (2005), 189-197.

[9] C.Z. Wei, *Multivariate adaptive stochastic approximation*, Ann. of Stat, $N°3$, **15** (1987), 1115-1130.

[10] T. Birkel, *Moment bounds for associated sequences*, Ann Probab, **16** (1988), 1184-1193.

[11] D.A. Ioannides, G.G. Roussas, *Exponential inequality for associated random variables*, Statist Probab Lett, **42** (1999), 423-431.

[12] S.C. Yang, M. Chen, *Exponential inequalities for associated random variables and strong laws of large numbers*, Science in China Series A : Mathematics, $N°5$, **50** (2007), 705-714.

[13] Q.M. Shao, H. Yu, *Weak convergence for weighed empirical processes of dependent sequences*, Ann Probab, **24** (1996), 2098-2127.

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 84, 2015, p. 131 - 139

[14] T.L. Lai, H. Robbins, *Adaptive design in regression and stochastic approximation*, Ann. Statist, **7** (1979), 1196-1221.

[15] A.N. Korostelev, *Procédures stochastiques récurrentes : propriétés locales*, Naouka, Moscou, (1984) (en russe).

[16] S.C. Yang, *Uniformly asymptotic normality of the regression weighted estimator for negatively associated samples*, Statist Prob Lett, **62** (2003), 101-110.

[17] J. Venter, *An extension of the Robbins-Monro procedure*, Ann. Mat. Statist, **38** (1967), 181-190.

(S. R.)
Samir Rahmani
Département de Technologie
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Université de Bejaia 06000, Algérie
E-mail address: samirahmani2002@yahoo.fr

(A. D.)
Abdelnasser Dahmani
Département de Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Université de Bejaia 06000, Algérie
E-mail address: a_dahmany@yahoo.fr