Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 37e année, nº 11-12, 1968, pp. 542-550

MODÈLE D'UNE TACHE COMME RÉSEAU FOURCHU

par C. HEUCHENNE (*)

SUMMARY

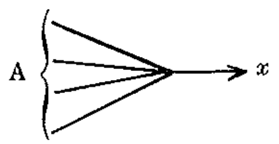
A representation by forks and a concept of walking are given to a relation of P(S) into S. The realization of a task in a social group then reduces to the problem of finding an optimum walk in the correspondent forked net. Dantzig's algorithm can be adapted to this situation.

On peut concevoir une entreprise collective comme la réalisation d'un objectif final par élaborations successives et personnelles d'objectifs intermédiaires. De manière plus précise disons que chaque travail personnel s'appuie sur des résultats acquis ; certains d'entre eux sont à la disposition directe de la personne concernée, d'autres devront lui être transmis par les individus qui les ont élaborés antérieurement.

Essentiellement, on a affaire à deux ensembles, celui des personnes et celui des résultats, et, en leur sein, aux relations qui décrivent la possession personnelle des données initiales, les transmissions possibles et les constructions d'un résultat à partir d'autres.

Ce schéma général, qui peut intéresser tant le sociologue que le chercheur opérationnel, sera adéquatement formalisé par le concept de réseau fourchu. Ceci permettra de trouver la manière la plus économique de réaliser l'entreprise collective.

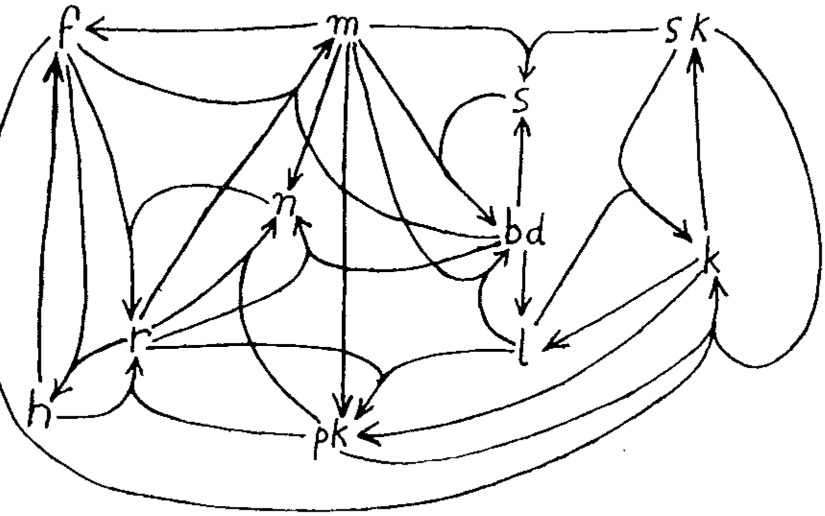
Un *réseau fourchu* de S est une relation Γ de l'ensemble P(S) des parties de S vers S, soit un sous-ensemble du produit $P(S) \times S$. La liaison de $A \in P(S)$ avec $x \in S$ sera représentée graphiquement par une fourche dont les dents sont incidentes à tous les éléments de A et dont le manche est une flèche vers x :



Bien des situations peuvent être figurées commodément par des réseaux fourchus. Un arbre généalogique en est un où toute fourche a deux dents. Un schéma logique est un autre exemple : l'ensemble A de propositions est lié à x quand la réalisation simultanée de tous les éléments de A entraîne celle de la proposition x ;

(*) Institut de Mathématique, 15, avenue des Tilleuls, Liège.
Présenté par F. Jongmans, le 21 novembre 1968.

dans cette optique, une structure d'implications est un réseau fourchu. Pour les propriétés topologiques courantes, ceci donne :



bd à base dénombrable	*l* de Lindelöf	*r* régulier
f de Fréchet	*m* métrisable	*s* séparable
h de Hausdorff	*n* normal	*sk* semi-compact
k compact	*pk* paracompact	

Cet exemple classique nous met sur la voie d'une définition possible du chemin dans un réseau fourchu. Un ensemble A de propriétés implique immédiatement un ensemble B quand toute propriété de B, ou bien est dans A, ou bien résulte de la conjonction de certaines propriétés de A ; ainsi $\{f, l, r\}$ implique $\{h, pk, r\}$. A un réseau fourchu Γ de S, on peut associer un *graphe* Δ *de* P(S) (relation binaire de P(S)) où un arc va de A vers B quand tout élément de B appartient à A ou provient par Γ d'éléments de A. Formellement, $A\Delta B$ lorsque $B \subset L(A) = \{x \in S : x \in A$ ou il y a $C \subset A$ tel que $C\Gamma x\}$; L(A) est constitué des éléments que procure directement A. Dans l'exemple précédent, $\{f, l, r\}\Delta\{h, pk, r\}$ parce que f et r donnent h, l et r donnent pk, ou symboliquement parce que $\{h, pk, r\} \subset L(\{f, l, r\}) = \{f, h, l, pk, r\}$.

Notons les propriétés de l'application L de P(S) dans P(S) : $A \subset L(A)$, $M \subset N$ donne $L(M) \subset L(N)$ et $\bigcup_{i\in I} L(A_i) \subset L(\bigcup_{i\in I} A_i)$. Il en résulte aussitôt que $A\Delta A$ (graphe Δ réflexif), que $M \supset A\Delta B \supset N$ entraîne $M\Delta N$, et que $(\bigcup_{i\in I} A_i)\Delta(\bigcup_{i\in I} B_i)$ si $A_i \Delta B_i$ pour tout $i \in I$.

Mais, dans le schéma d'implications topologiques, le bloc $\{h, pk, r\}$ procure lui-même $\{n\}$. Au total, l'implication de n par la conjonction de f, l et r est la traduction dans le graphe Δ du cheminement $\{f, l, r\} \to \{h, pk, r\} \to \{n\}$. On conviendra d'appeler *chemin du réseau fourchu* Γ un chemin du graphe associé Δ. De manière générale, dans un schéma logique, un ensemble A de propositions entraînera un ensemble B quand, dans le réseau fourchu, il y aura un chemin de A vers B. Ainsi, les groupes $\{k, m\}$ et $\{bd, h, sk\}$ de propriétés topologiques sont équivalents parce que dans Δ, il existe un chemin du premier vers le second et vice-versa :

$$\begin{array}{ccc} & \{f, k, l, m, n, sk\} \to \{f, l, m, r, sk\} & \\ \{k, m\} & & \{bd, h, sk\} \\ & \{bd, f, k, r\} \leftarrow \{bd, h, k, pk\} \leftarrow \{bd, h, k\} \leftarrow \{bd, h, l, sk\} & \end{array}$$

Un graphe classique (relation binaire de S) est un réseau fourchu particulier : les fourches n'ont qu'une seule dent. Il est évident que, pour $x \neq y$, il y a un chemin de x vers y dans le graphe si et seulement s'il existe dans Δ un chemin de $\{x\}$ vers $\{y\}$.

J'en viens à la mise en œuvre des notions mathématiques précédentes dans le modèle d'une tâche collective. Pour ce faire, j'emploierai le vocabulaire de C. Flament dans sa Théorie des Graphes et Structures sociales (Gauthier-Villars, 1965, p. 73). Les individus et les informations en jeu (qui peuvent être des objets matériels) constituent l'ensemble S des sommets. Les fourches du réseau Γ rentrent dans trois catégories :

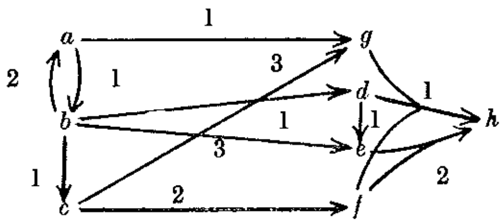
1) *Les communications* possibles, flèches simples entre personnes du groupe ; $\{a\}\Gamma b$ quand b peut transmettre des informations *vers* a.

2) Les *localisations* initiales de certaines informations, flèches simples partant d'une personne vers une information (dite primaire) ; $\{a\}\Gamma x$ quand l'individu a accède directement à l'information x.

3) Les *regroupements* de plusieurs informations en une autre information (dite secondaire) qui sont de véritables fourches ; $A\Gamma x$ quand l'ensemble A d'informations est nécessaire et suffisant pour élaborer l'information x.

Exemple :

Sommets Personnes Informations

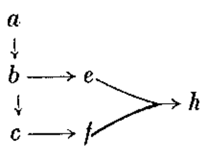


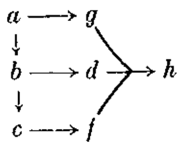
Fourches Communications Localisations Regroupements

Ici c peut transmettre à b, a et b peuvent se communiquer dans un sens ou l'autre ; b possède initialement les informations d et e, c les informations f et g, a l'information g ; enfin d procure e, h est donnée par la connaissance simultanée de d, f et g ou encore de e et f.

La réalisation de la tâche est l'obtention, après transferts et regroupements éventuels, par un groupe spécifié A de personnes d'un ensemble spécifié B d'informations. *Dans le réseau fourchu* Γ, *cela revient à trouver un chemin de* A *vers* B.

Dans l'exemple, supposons que la tâche soit l'obtention de l'information h par l'individu a. Deux chemins de a vers h sont : $\{a\} \to \{b\} \to \{c, e\} \to \{e, f\} \to \{h\}$; $\{a\} \to \{b, g\} \to \{c, d, g\} \to \{d, f, g\} \to \{h\}$. Le premier chemin traduit le processus concret suivant : c, en possession de l'information f, la transmet à b, b regroupe e et f en h qu'il communique à a. Pour le second chemin, c transmet f à b, b envoie d et f à a qui regroupe d, f et g en h. Les fourches empruntées du réseau sont figurées ci-dessous.





Il faut noter ici que les regroupements ne sont pas imposés à une personne déterminée ; ainsi, le premier chemin correspond aussi bien à la réalisation suivante : c envoie f à b qui communique e et f à a lequel regroupe ces informations en h. Selon le cas, c'est b ou a qui procède à l'élaboration de h à partir de e et f.

Par contre, les informations f et g sont tout ce que c peut obtenir ; il n'est donc pas habilité à réaliser la tâche. Aussi, le problème peut être posé différemment. À priori, toutes les communications sont possibles entre les membres du groupe (qui constitue alors un sous-graphe complet) ; on cherche alors un chemin partant d'un individu spécifié vers l'information finale ; seuls les canaux empruntés par ce chemin seront effectivement construits pour rendre réalisable la tâche collective. C'est le problème posé par C. Flament (p. 78).

Il est visible que, généralement, plusieurs solutions seront possibles. Il est donc raisonnable de chercher celle qui, en un certain sens, sera la meilleure. Concrètement, ceci se traduit en affectant chaque opération (transmission, accès direct ou regroupement) d'un coût ; mathématiquement, c'est doter chaque fourche d'une valeur non négative. Le réseau fourchu Γ étant *valué* et S étant supposé dorénavant fini, on posera pour $A\Delta B$: $v(A, B) = \sum_{x \in B - A} \min_{C \subset A} v(C, x)$; ceci a un sens puisque, si $x \in B - A \subset L(A) - A$, il existe au moins une partie $C \subset A$ telle que $C\Gamma x$, donc une valeur $v(C, x)$; si $B \subset A$, $B - A = \varnothing$ et $v(A, B) = 0$. De cette manière le graphe Δ de P(S) est univoquement valué.

Cela étant, il s'agira de chercher dans Δ un chemin ayant une valeur totale minimum. Ceci peut se faire par l'algorithme de marquage de Dantzig ; je rappelle brièvement en quoi il consiste. Coter zéro le sommet initial ; de chaque sommet déjà marqué faire partir l'arc de plus faible valeur vers un sommet non coté et attribuer à ce dernier la cote provisoire somme de la valeur de l'arc et de la cote du sommet de départ ; marquer définitivement le sommet qui a la plus petite cote provisoire ; répéter le procédé jusqu'à saturation. Pour reconnaître le chemin de valeur minimum, on barre l'arc qui induit une nouvelle marque de sommet.

Mais le graphe Δ de P(S) est vite d'une complication insensée ; outre le nombre important $2^{|S|}$ de ses sommets, le degré extérieur de A y est $2^{|L(A)|}$. Or, en ce qui concerne le modèle d'une tâche, deux problèmes essentiels se posent :

1) Trouver toutes les informations que peut posséder un groupe donné d'individus A_0, et pour chacune d'elles à quel prix ; mathématiquement, c'est chercher les chemins de valeur minimum qui partent de A_0 dans le graphe Δ. On recourra dans un but de simplification à son *sous-graphe* Δ' défini comme suit : de chaque sommet A part une flèche vers $A \cup \{x\}$ si $x \notin A$ peut être obtenu de A. Formellement, $A\Delta'B$ quand il existe $x \in L(A) - A$ tel que $B = A \cup \{x\}$.

2) Trouver tous les gens qui peuvent obtenir un ensemble donné d'informations B_0 (par exemple une seule qui serait la réalisation finale de la tâche), et pour chacun d'eux à quel prix ; mathématiquement, c'est chercher les chemins de valeur minimum qui arrivent en B_0 dans le graphe Δ. On recourra dans un but de simplification à son *sous-graphe* Δ'' défini comme suit : $B = \{g, h, \ldots, m, x, n, \ldots, s\}$ reçoit une flèche d'une récriture possible $\{g, h, \ldots, m, a, b, \ldots, e, n, \ldots, s\}$ où $\{a, b, \ldots, e\}\Gamma x$. Formellement, $A\Delta''B$ lorsqu'il y a $x \in B$ et $D \not\ni x$ tels que $D\Gamma x$ et $A = (B - \{x\}) \cup D$.

Théorème : les quatre existences suivantes sont logiquement équivalentes : 1) un entier $n \geqslant 0$ tel que $L^n(A) \supset B$ (*) ; 2) un chemin de A vers B dans le graphe Δ ;

3) un chemin de A vers un sur-ensemble de B dans le graphe Δ' ; 4) un chemin d'un sous-ensemble de A vers B dans le graphe Δ''.

Lemme a : il y a un chemin de A vers L(A) dans Δ'.

Si $A = L(A)$, la longueur du chemin est nulle. Sinon, posons $L(A) - A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Pour $k = 1, 2, \ldots, n$, on a $(A \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} \{x_i\}) \Delta' (A \cup \bigcup_{i=1}^{k} \{x_i\})$ car $x_k \in L(A) - (A \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} \{x_i\}) \subset L(A \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} \{x_i\}) - (A \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} \{x_i\})$; il y a bien un chemin de A (obtenu pour $k = 1$) vers L(A) (obtenu pour $k = n$).

Lemme b : si $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ constitue un chemin dans Δ' ($n \geqslant 1$) et si $A_0 \not\supset B$, $A_n \supset B$, on peut trouver un $k \in [0, n-1]$ tel que $C\Delta''B$ pour une partie C de A_k.

Puisque $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \ldots \subset A_n$, soit k le plus grand entier tel que $B \not\subset A_k$; comme $B \subset A_{k+1} = A_k \cup \{x\}$ pour un $x \in L(A_k) - A_k$, $x \in B$. D'ailleurs, $x \in L(A_k)$ entraîne l'existence de $D \subset A_k$ avec $D\Gamma x$; $x \notin D$ puisque $x \notin A_k$. En posant $C = (B - \{x\}) \cup D$, on a $C\Delta''B$ et $C \subset A_k$.

Pour prouver le théorème, j'établirai les implications (1) → (3) → (4) → (2) → (1).

(1) → (3). Par le lemme *a*, il existe un chemin dans Δ' de A vers L(A), de L(A) vers $L^2(A)$, ... de $L^{n-1}(A)$ vers $L^n(A) \supset B$, donc un chemin de A vers un sur-ensemble de B.

(3) → (4). Soit $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ un chemin dans Δ' de $A = A_0$ vers $A_n \supset B$. Si $A_0 \supset B$, il y a un chemin de longueur nulle dans Δ'' d'un sous-ensemble de A (B lui-même) vers B ; sinon, le lemme *b* procure un $C_1 \subset A_k$ ($k < n$) tel que $C_1\Delta''B$. Si $C_1 \subset A_0$, la preuve est faite ; sinon, le lemme *b* appliqué au chemin $(A_0, A_1, \ldots, A_k)$ procure un $C_2 \subset A_j$ ($j < k$) tel que $C_2\Delta''C_1$. Si $C_2 \subset A_0$, la preuve est finie, sinon on continue avec le chemin $(A_0, A_1, \ldots, A_j)$. De toute manière, on trouvera une suite $(C_p, C_{p-1}, \ldots, C_2, C_1)$ telle que $C_p \subset A_0$, $C_i\Delta''C_{i-1}$ pour $i = 2, \ldots, p$ et $C_1\Delta''B$.

(4) → (2). Un chemin de $C \subset A$ vers B dans Δ'' est aussi un chemin de C vers B dans Δ ; il suffit de voir que $A\Delta C$ pour obtenir un chemin de A vers B dans Δ.

(2) → (1). Si $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ constitue le chemin dans Δ de $A = A_0$ vers $A_n = B$, on a $A_i \subset L(A_{i-1})$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, donc $B = A_n \subset L^n(A_0) = L^n(A)$.

Puisque Δ' et Δ'' sont des sous-graphes de Δ, leurs arcs recevront les valeurs attribuées dans Δ. Si $A\Delta'B = A \cup \{x\}$, $v(A, B) = \min_{C \subset A} v(C, x)$ puisque $B - A = \{x\}$; de même, si $(B - \{x\} \cup D = A\Delta''B$, $v(A, B) = \min_{C \subset A} v(C, x)$ puisque $B - A = B - ((B - \{x\}) \cup D) = \{x\} \cap (B - D) = \{x\}$. La cotation des flèches est ainsi considérablement simplifiée dans Δ' et Δ'' ; en outre, dans ces sous-graphes, la redondance des arcs allant d'un sommet vers ses sous-ensembles est supprimée.

Envisageons d'abord le marquage des chemins partant d'un sommet donné A_0 (problème 1). On applique l'algorithme de Dantzig progressivement à partir de A_0 coté zéro. *Les cotes obtenues dans Δ' et Δ seront les mêmes à condition d'attribuer à une partie dans Δ' la marque de son premier sur-ensemble qui soit coté.*

En effet, soit un stade où certains sommets A sont marqués de la même manière dans Δ et Δ'. Dans Δ', comme dans Δ, si B non coté est partie d'un A marqué, B reçoit derechef la cote minimum de ses sur-ensembles A. Supposons donc à présent que parmi les sommets B non cotés, il n'y ait plus de sous-ensembles de sommets A déjà marqués.

(*) Il est convenu que $L^0(A) = A$, $L^1(A) = L(A)$, $L^2(A) = L(L(A))$, etc.

Dans Δ', les sommets B susceptibles d'être cotés sont de la forme $A \cup \{x\}$ ou une de leurs parties ; leur marque provisoire est le plus petit nombre $c_A + \min_{C \subset A} v(C, x)$.

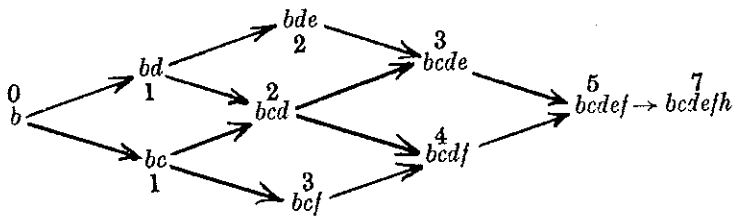
Dans Δ, les sommets B susceptibles d'être cotés sont tels que $B \subset L(A)$; puisque $B \not\subset A$, $B - A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ où $n \geqslant 1$; leur marque provisoire est le plus petit nombre $c_A + \sum_{y \in B-A} \min_{C \subset A} v(C, y)$, supérieur ou égal à $c_A + \min_{C \subset A} v(C, x_1)$, lui-même supérieur ou égal à la cote provisoire attribuée dans Δ' à $A \cup \{x_1\}$.

Le minimum des cotes provisoires est identique dans Δ et Δ' ; les nouveaux sommets B marqués y sont les mêmes. Les sommets cotés dans Δ sont ceux où aboutit un chemin venant de A_0 ; par le théorème, tous ces sommets sont aussi marqués dans Δ', ce qui achève la preuve.

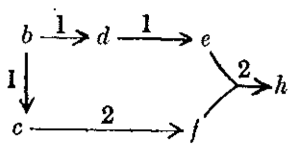
L'algorithme est illustré sur l'exemple avec départ en $\{b\}$. Voir la figure p. 548.

Ceci sera complété par la liste auxiliaire $c1$, $d1$, $a2$, $cd2$, $be2$ (bien que be soit marqué 3 dans le graphe ; en fait, il a reçu auparavant la cote 2 comme partie de bde), etc.

On voit par exemple qu'il en coûtera 9 unités à b pour posséder toutes les informations. Si seule l'information h l'intéresse, le prix sera 7 unités car le premier sommet coté contenant h est $bcdefh$ avec la marque 7. Les chemins minima qui y mènent sont



Les fourches empruntées du réseau sont

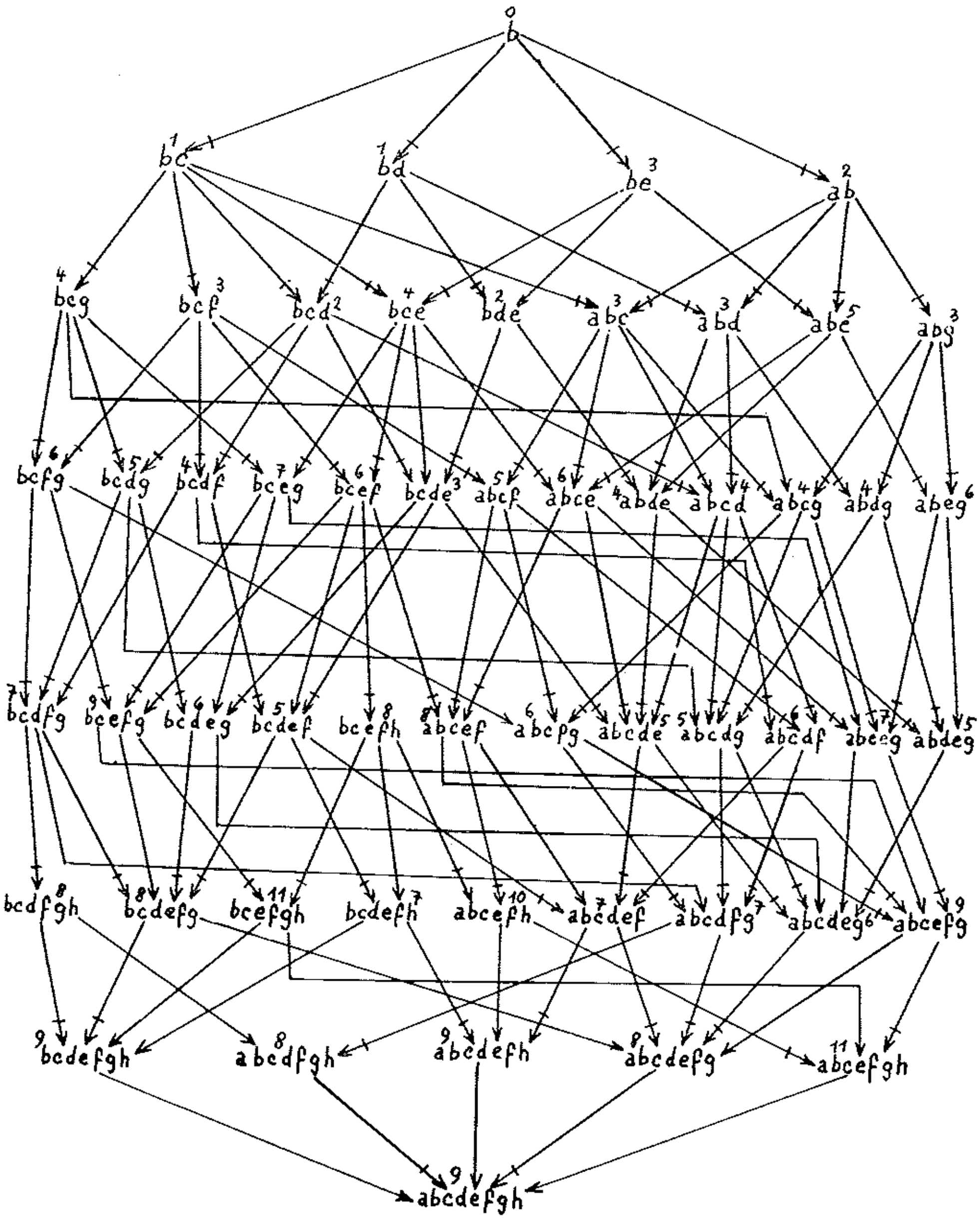


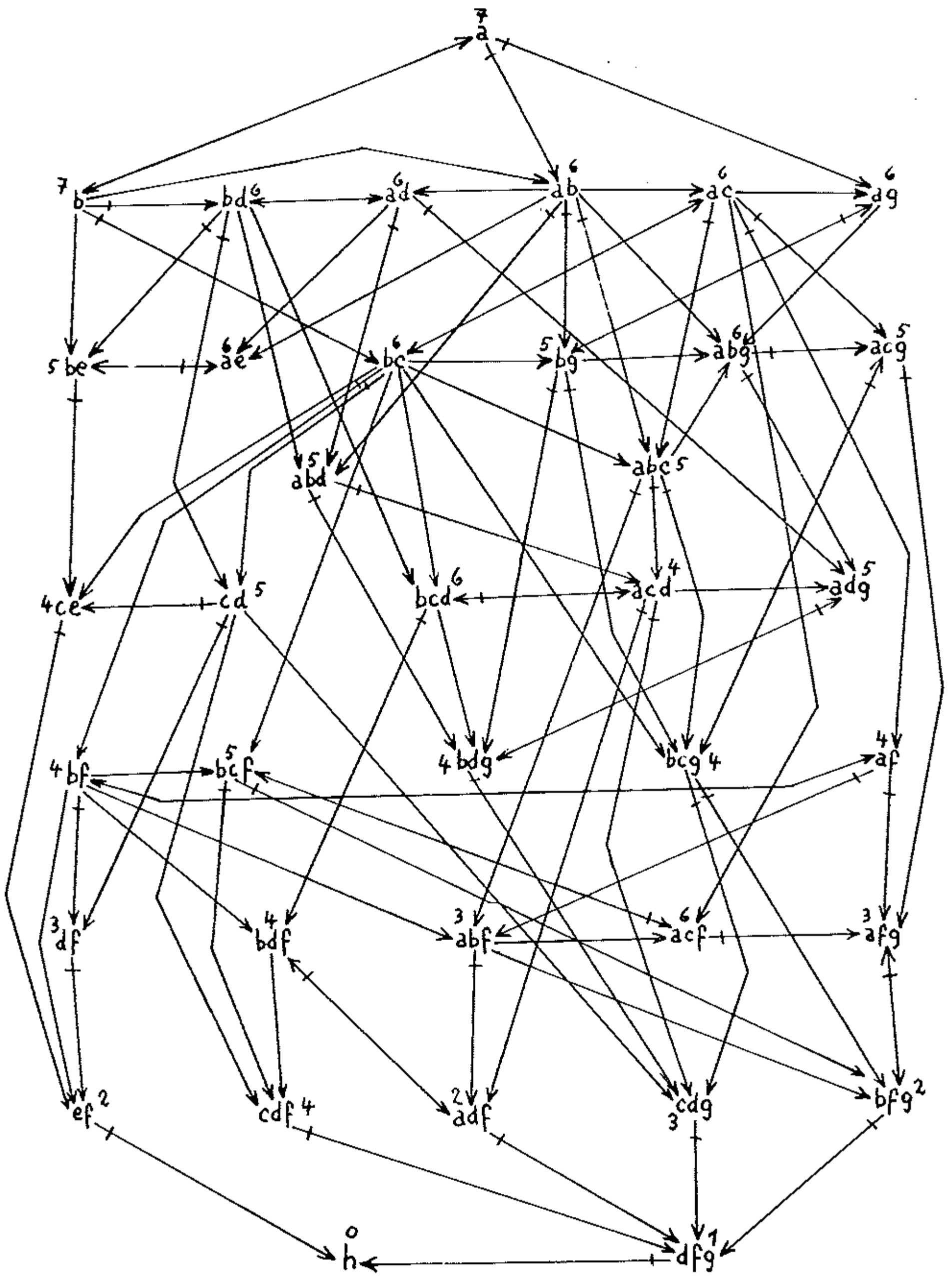
Concrètement, b tire l'information e de d ; avec l'information f transmise par c il élabore h.

Considérons à présent le marquage des chemins arrivant à un sommet donné B_0 (problème 2). On applique l'algorithme de Dantzig régressivement (en sens opposé des flèches) à partir de B_0 coté zéro. *Les cotes obtenues dans Δ et Δ'' seront identiques à condition d'attribuer à une partie dans Δ'' la marque de son premier sous-ensemble qui soit coté.*

La démonstration est similaire à celle faite pour Δ et Δ' ; ici les sommets A susceptibles d'être cotés dans Δ'' à partir des B déjà marqués sont de la forme $(B - \{x\}) \cup D$ ou un de leurs sur-ensembles ; leur cote provisoire est le plus petit nombre $c_B + \min_{C \subset A} v(C, x)$.

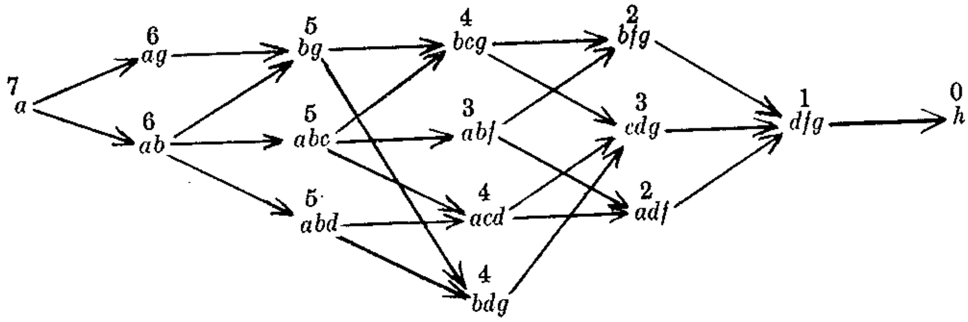
L'algorithme est illustré sur l'exemple avec arrivée en $\{h\}$. Voir la figure p. 549.


b
bc
bd
be
ab
bcg
bcf
bcd
bce
bde
abc
abd
abe
abg
bcfg
bcdg
bcdf
bceg
bcef
bcde
abcf
abce
abde
abcd
abcg
abdg
abeg
bcdfg
bcefg
bcdeg
bcdef
bcefh
abcef
abcfg
abcde
abcdg
abcdf
abceg
abdeg
bcdfgh
bcdefg
bcefgh
bcdefh
abcefh
abcdef
abcdfg
abcdeg
abcefg
bcdefgh
abcdfgh
abcdefh
abcdefg
abcefgh
abcdefgh

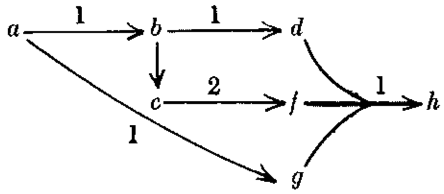

a
b
bd
ad
ab
ac
ag
be
ae
bc
bg
abg
acg
abd
abc
ce
cd
bcd
acd
adg
bf
bcf
bdg
bcg
af
df
bdf
abf
acf
afg
ef
cdf
adf
cdg
bfg
h
dfg

Ceci sera complété par le constat auxilaire : tous les sur-ensembles de $\{h\}$ sont cotés 0, tous les sur-ensembles de $\{d, f, g\}$ (sauf ceux contenant h) sont cotés 1, etc.

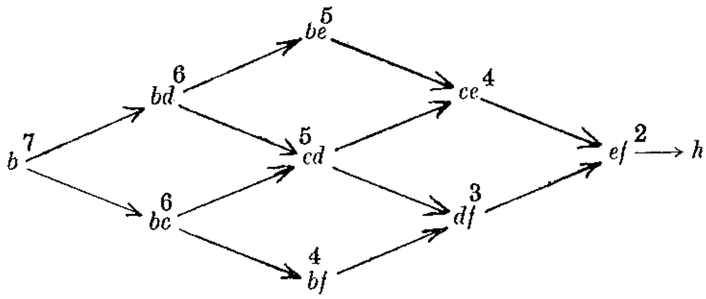
La possession de l'information finale h par a ou b coûte 7 unités. Le chemin minimum pour a est



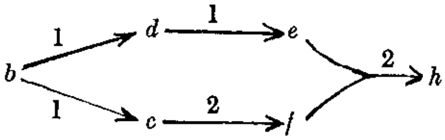
Les fourches empruntées du réseau sont



Le chemin minimum pour b est



Les fourches empruntées du réseau sont



En commentaire final, il semble bien que la méthode proposée résolve le problème général de C. Flament, sans exiger aucune des restrictions T_1, T_2 et T_3 (p. 76). Il faut cependant noter que la valeur attribuée à un canal est le coût de son emprunt quel que soit le nombre d'informations qui le parcourent.