Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 41e année, no 1-2, 1972, pp. 31-39

THÉORIE SYMPLECTIQUE DU FLUIDE PARFAIT RELATIVISTE (*)

par P. V. GROSJEAN
Professeur à l'Université de Mons
Belgique

SUMMARY

We intend to show that :

1o The existence of an adiabatic perfect fluid, in the spacetime V of the special relativity, gives to V the structure of a four-dimensional symplectic manifold.

The equations of motion of a particle are then *symplectic* hamiltonian or lagrangian equations, where the descriptive parameter τ is the Van Dantzig's and Schmid's « thermasy », i.e. a function of which the time rate of change is the relativistic temperature $T = \frac{d\tau}{dt}$.

The specific entropy $\mathscr{S}$ acts as a symplectic hamiltonian, to which the thermasy τ is canonically conjugated *in the spacetime* V. This hamiltonian $\mathscr{S}$ is associated with the symplectic lagrangian $\mathscr{L} = \theta + \psi$, where $\theta = T^{-1}$ is the reciprocal temperature and ψ the thermodynamical potential $\mathscr{G}/T$ ($\mathscr{G}$ being the free energy of Gibbs).

2o If the fluid is barotropic, but not necessarily adiabatic, there exists another hamiltonian $\mathscr{M}$, canonically conjugated (in V) to the proper time t of the fluid particle. And $\mathscr{M}$ is associated with the lagrangian $\mathscr{N} = 1 + \mathscr{H} - \mathscr{M}$, where $\mathscr{H}$ is the enthalpy.

The symplectic formalism leads directly to covariantive relativistic statements of Bernouilli's two theorems and of Kelvin's theorem on circulation.

Always through the same methods, the relativistic notions of « steady flow » and of « irrotational flow » will have been very easily defined, in a covariantive way.

§ 1. — THÉORIE VARIATIONNELLE

1.1. — Dans tout ce qui suivra : 1o — Les lettres sous-pointées désigneront des densités, au sens physique et au sens tensoriel du terme ; $\underset{.}{g}$ sera la *densité métrique fondamentale* et $\underset{.}{\mu}$ la *densité de matière.* 2o — Les majuscules cursives désigneront des grandeurs « spécifiques », c'est-à-dire ramenées à l'unité de masse ; ainsi le *volume spécifique* sera :

$$\mathscr{V} = \underset{.}{g}/\underset{.}{\mu} = \mu^{-1} \tag{1}$$

A toute grandeur spécifique $\mathscr{A}$ correspond une densité $\underset{.}{a} = \mathscr{A}\underset{.}{\mu}$.

1.2. — La seule donnée du problème est l'*énergie interne* $\mathscr{E}$ fonction supposée connue de $\mathscr{V}$ et de l'*entropie* $\mathscr{S}$. Cette énergie s'additionnera à l'*énergie matérielle spécifique,* — qui est $c^2 = 1$, — pour donner l'énergie totale $(1 + \mathscr{E})$, de densité

$$\underset{.}{\rho} = \underset{.}{\mu}(1 + \mathscr{E}) = \underset{.}{\mu} + \underset{.}{e} \tag{2}$$

(*) Communiquée à la « Conference on Relativity and Related Topics », Bruxelles, décembre 1971.

Présenté par P. Ledoux, le 20 janvier 1972.

En 1969, L. A. Schmid, étudiant le *fluide parfait adiabatique relativiste* (*), a proposé le principe variationnel ci-après, où l'intégrale est étendue sur un morceau $\mathscr{L}$ de l'univers de Minkowski

$$(3) \qquad \delta \int\int\int\int_{M} \underset{\bullet}{\Lambda}\, d\dot{x} = 0, \text{ où : } d\dot{x} = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$

et où la lagrangienne :

$$(4) \qquad \underset{\bullet}{\Lambda} \overset{\text{déf}}{=} \underset{\bullet}{\mu}\,[(1+\mathscr{E})\sqrt{v^{\mu}v_{\mu}} - v^{\lambda}(\mathscr{S}\partial_{\lambda}\tau + \mathscr{B}\partial_{\lambda}\alpha + \partial_{\lambda}\mathscr{J})] + \underset{\bullet}{\rho}\,[\sqrt{v^{\mu}v_{\mu}} - 1]$$

est *invariante pour le groupe de Lorentz*. La signature de la métrique a été choisie ici égale à $(- - - +)$.

La vitesse v^{μ} est celle de la matière, et ce sera aussi celle de l'énergie, chaque particule étant adiabatique. Les grandeurs $\mathscr{J}$, p, τ, $\mathscr{B}$, α, sont des multiplicateurs de Lagrange, qu'on devra varier au même titre que $\mathscr{S}$, $\mathscr{V}$ et les quatre v^{λ}.

1.3. — Les variations des multiplicateurs donnent :

$$(5) \qquad \partial_{\lambda}(\underset{\bullet}{\mu} v^{\lambda}) = 0; \quad \sqrt{v^{\mu}v_{\mu}} = 1; \quad \frac{d\mathscr{S}}{dt} = 0; \quad \frac{d\alpha}{dt} = 0; \quad \frac{d\mathscr{B}}{dt} = 0.$$

Et celle de $\mathscr{S}$ et de $\mathscr{V}$ donnent :

$$(6)\text{-}(7) \qquad \mathrm{T} \overset{\text{déf}}{=} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \mathscr{S}} = \frac{d\tau}{dt} \qquad p = -\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \mathscr{V}} \overset{\text{déf}}{=} \underset{\bullet}{p}/\underset{\bullet}{g}$$

Donc, p est la *pression*, multipliée par g. Et τ est la *thermacie* de D. Van Dantzig (1939-40), les iso-thermaciques (iso-τ) étant du genre espace.

Les variations des v^{λ} conduisent aux relations :

$$(8) \qquad \pi^{*}_{\lambda} \overset{\text{déf}}{=} \pi_{\lambda} - \partial_{\lambda}\mathscr{J} = \mathscr{S}\partial_{\lambda}\tau + \mathscr{B}\partial_{\lambda}\alpha$$

où

$$(9) \qquad \boxed{\pi_{\lambda} \overset{\text{déf}}{=} (1 + \mathscr{H})v_{\lambda}}$$

$$(10) \qquad \mathscr{H} \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{E} + p\mathscr{V} = \text{enthalpie spécifique.}$$

1.4. — A partir d'ici, *nous allons nous séparer de Schmid*, et continuer l'étude par une méthode relevant de la **géométrie différentielle symplectique**. Ajoutons cependant que Schmid a généralisé sa théorie au cas où le fluide se compose de plusieurs phases, notées A, B, ..., en *équilibre thermique*.

On a alors :

$$(11) \qquad \partial_{\lambda}\,[\underset{\bullet}{s}_{\mathrm{A}} \cdot v^{\lambda}_{\mathrm{A}}] + \underset{\bullet}{\varphi}_{\mathrm{A}} = \underset{\bullet}{0}; \quad \sum_{\mathrm{A}} \underset{\bullet}{\varphi}_{\mathrm{A}} = \underset{\bullet}{0} \Leftrightarrow \sum_{\mathrm{A}} \underset{\bullet}{\mu}_{\mathrm{A}} \frac{d\mathscr{S}_{\mathrm{A}}}{dt} = \underset{\bullet}{0}$$

les $\underset{\bullet}{\varphi}_{\mathrm{A}}$ étant les flux d'entropie (*échanges réversibles*).

Le calcul variationnel conduit alors à une conclusion remarquable : *La thermacie τ est la même pour toutes les phases* : $\tau_{\mathrm{A}} = \tau_{\mathrm{B}} = \ldots \tau$. Il en va pareillement pour le *covecteur de température*, défini par :

$$(12) \qquad \mathrm{T}_{\lambda} \overset{\text{déf}}{=} \partial_{\lambda}\tau$$

(*) L. A. Schmid, *Effects of Heat Exchange on Relativistic Fluid Flow.* A Critical Review of Thermodynamics — Mono Book Corp., Baltimore, 1970.

Par contre, chaque phase A est caractérisée par une température T_A, définie par (6); donc, *bien qu'il y ait équilibre thermique,* on aura :

$$\frac{d\tau}{dt_A} = T_A \neq T_B = \frac{d\tau}{dt_B} \quad (\neq, \text{ en général}) \tag{13}$$

Et à chaque phase correspondra un *contravecteur de température réciproque* :

$$\theta_A \overset{\text{déf}}{=} \theta_A \,.\, v_A, \quad \text{où :} \quad \theta_A = T_A^{-1} \tag{14}$$

§ 2. — ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE LOCALE

2.1. — La variété V, de dimension paire $2n$, sera **symplectique** s'il existe une *2-forme symplectique,* $\sigma_{\lambda\mu}$, *régulière et fermée.* Un champ θ_λ sera **dynamique** pour $\sigma_{\lambda\mu}$ si l'on a :

$$\boxed{X_{(\tau)}\sigma_{\lambda\mu} = 0} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, 2n) \tag{15}$$

où $X_{(\tau)}$ est la dérivation de Lie associée au champ θ^λ, dont les lignes sont données par

$$dx^\lambda = \theta^\lambda \,.\, d\tau \tag{16}$$

On montre qu'il existe alors, au moins localement :

1° — un potentiel $\mathscr{S}$, appelé le *hamiltonien symplectique,* tel que l'on ait

$$\boxed{\sigma_{\lambda\mu}\theta^\mu = \partial_\lambda \mathscr{S}} \Rightarrow \frac{d\mathscr{S}}{d\tau} = 0 \tag{17}$$

Le système (17) est celui des **équations de Hamilton** (au sens symplectique).

2° — un autre potentiel $\mathscr{L}$, appelé le *lagrangien symplectique,* tel que l'on ait

$$\boxed{X_{(\tau)}\pi_\lambda = \partial_\lambda \mathscr{L}} \tag{18}$$

où π_λ est un potentiel de $\sigma_{\lambda\mu}$. Comme ce *potentiel symplectique* π_λ n'est fixé qu'à un gradient $\partial_\lambda f$ près, $\mathscr{L}$ ne sera déterminée qu'à $\frac{df}{d\tau}$ près; et l'on aura :

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathscr{S} = \theta_\lambda \pi^\lambda - \mathscr{L} = \theta^\lambda \pi'_\lambda - \mathscr{L}' = \ldots \\ &\pi'_\lambda = \pi_\lambda + \partial_\lambda f; \ \mathscr{L}' = \mathscr{L} + \frac{df}{d\tau} \end{aligned} \right. \tag{19}$$

Le système (18) est celui des **équations de Lagrange** (au sens symplectique).

2.2. — Un système de coordonnées, noté $[x^{\mu'}] = [Q^1, \ldots, Q^n, \mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_n] = [\overline{Q}, \underline{\mathscr{P}}]$, sera *canonique* s'il confère à $\sigma_{\lambda'\mu'}$ une écriture canonique, — voir (33) ci-après. Un potentiel canonique admissible est alors $\mathring{\pi}_{\lambda'}$, dont les composantes sont :

$$[\mathring{\pi}_{\mu'}] = [\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_n; \ 0, \ldots, 0] = [\underline{\mathscr{P}}, \overline{0}] \tag{20}$$

Avec un tel potentiel, on a identiquement :

$$\mathring{\pi}_{\mu'} dx^{\mu'} = \mathscr{P}_i dQ^i \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mu' = 1, 2, \ldots, 2n \\ &i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \right. \tag{21}$$

Donnons-nous une transformation canonique $[\underline{\mathscr{P}}, \overline{Q}] \to [\underline{p}, \bar{q}]$. On sait qu'il existe alors une génératrice $\mathscr{I}(\bar{q}, \overline{Q})$, telle que l'on ait

$$p_j dq^j - \mathscr{P}_i dQ^i = d\mathscr{I} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

2.3. — Soit maintenant x^λ un système de coordonnées (une carte) obtenu par transformation régulière du système $[\xi^\alpha] = [\bar{q}, \underline{p}]$ introduit en (22). Au système $[\xi^\alpha]$ correspondait un potentiel canonique $\overset{\circ}{\pi}_\alpha$, du type (20); au système $[x^\lambda]$ va correspondre le potentiel symplectique π_λ, *non canonique en général* :

$$\pi_\lambda = \overset{\circ}{\pi}_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda} \tag{23}$$

Si nous exprimons π_λ, $\mathscr{P}_i$, Q^i et $\mathscr{J}$ en fonction des x_λ, (22) s'écrira :

$$\boxed{\pi_\lambda dx^\lambda - \mathscr{P}_i dQ^i = d\mathscr{J}} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1, 2, \ldots, 2n \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right. \tag{24}$$

2.4. — En particulier, le système $[\bar{Q}, \underline{\mathscr{P}}]$ peut être « *résolvant* » : L'un des $\mathscr{P}$ est le hamiltonien $\mathscr{S}$, et le Q de même numéro est le *paramètre descriptif* τ; les autres $\mathscr{P}$ et les autres Q sont des intégrales premières. Dès lors, (24) devient, d'après (19) :

$$\frac{d\mathscr{J}}{d\tau} = \theta^\lambda \pi_\lambda - \mathscr{S} = \mathscr{L} \tag{25}$$

En posant

$$\pi_\lambda^* = \pi_\lambda - \partial_\lambda \mathscr{J} \;\Rightarrow\; \mathscr{S} = \theta_\lambda \pi_\lambda^*, \tag{26}$$

on définit un *potentiel symplectique* « *standard* » π_λ, pour lequel les équations symplectiques de Lagrange se réduisent à :

$$\boxed{X_{(\tau)} \pi_\lambda^* = 0} \tag{27}$$

2.5. — Ceci étant rappelé, on constate une analogie frappante entre la relation symplectique (24) et la relation :

$$\boxed{\pi_\lambda dx^\lambda - \mathscr{S} d\tau - \mathscr{B} d\alpha = d\mathscr{J}} \tag{28}$$

issue de l'équation (8) de Schmid. Cette analogie est la clé de la théorie symplectique du fluide adiabatique relativiste (et de bien d'autres théories de fluides d'ailleurs, — voir § 4 et 5 ci-après).

§ 3. — THÉORIE SYMPLECTIQUE DU FLUIDE RELATIVISTE

3.1. — Raccordons les notations des § 1 et 2 en posant maintenant :

$$x^{1'} = Q^1 = \alpha, \quad x^{2'} = Q^2 = \tau, \quad x^{3'} = \mathscr{P}_1 = \mathscr{B}, \quad x^{4'} = \mathscr{P}_2 = \mathscr{S} \tag{29}$$

Ainsi (8) va s'écrire :

$$\pi_\lambda^* = \mathscr{P}_i \partial_\lambda Q^i = \pi_\lambda - \partial_\lambda \mathscr{J} \qquad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2. \\ \lambda = 1, 2, 3, 4. \end{array} \right. \tag{30}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda\mu} &= \partial_\lambda \pi_\lambda^* - \partial_\mu \pi_\lambda^* = \partial_\lambda \pi_\mu - \partial_\mu \pi_\lambda \\ &= \partial_\lambda \mathscr{P}_i \,.\, \partial_\mu Q^i - \partial_\mu \mathscr{P}_j \partial_\lambda Q^j = \{x^\lambda ; x^\mu\} \end{aligned} \tag{31}$$

où

$$\{x^\lambda ; x^\mu\} = \sigma_{\alpha'\beta'} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\mu} = \text{crochet de Lagrange} \tag{32}$$

avec

$$(33) \qquad \mathrm{Mat}\,(\sigma_{\alpha'\beta'}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \text{où} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$(31') \qquad \boxed{\sigma_{\lambda\mu} = \partial_\lambda\mathscr{S} \,.\, \partial_\mu\tau - \partial_\mu\mathscr{S} \,.\, \partial_\lambda\tau + \partial_\lambda\mathscr{B} \,.\, \partial_\mu\alpha - \partial_\mu\mathscr{B} \,.\, \partial_\lambda\alpha}$$

Ainsi la 2-forme *non canonique* $\sigma_{\lambda\mu}$ est la transformée de la 2-forme *canonique* $\sigma_{\alpha'\beta'}$; celle-ci étant régulière, il en va de même pour $\sigma_{\lambda\mu}$. Et le système $[\alpha, \tau, \mathscr{A}, \mathscr{S}]$ est une carte canonique pour V, valable sur M.

Nous avons ainsi établi le théorème I :

« *L'existence du fluide parfait adiabatique confère à l'espace-temps relativiste une structure de variété symplectique.* »

3.2. — Démontrons maintenant le théorème II :

« *Le champ* θ^λ *des vecteurs de température réciproque* (14) *est dynamique pour* $\sigma_{\lambda\mu}$; *autrement dit* : $X_{(\tau)}\sigma_{\lambda\mu} = 0$. »

En effet : Comme $\sigma_{\lambda\mu}$ est fermée, le théorème classique de Cartan donne :

$$(34) \qquad X_{(\tau)}\sigma_{\lambda\mu} = \partial_\lambda(\theta^\nu\sigma_{\nu\mu}) - \partial_\mu(\theta^\nu\sigma_{\nu\lambda})$$

Or, d'après (29) et (31'), — en se rappelant que $\mathscr{S}$, $\mathscr{B}$ et α sont des intégrales premières, — il vient :

$$(35)\text{-}(36) \qquad \theta^\lambda\sigma_{\lambda\mu} = \theta v^\lambda\sigma_{\lambda\mu} = -\,\partial_\mu\mathscr{S} \;\Rightarrow\; \boxed{X_{(\tau)}\sigma_{\lambda\mu} = 0}$$

Et comme (35) n'est autre chose que le *système* (17) *de Hamilton*, nous avons ainsi démontré le théorème III :

« *L'entropie spécifique* $\mathscr{S}$ *est le hamiltonien symplectique du mouvement du fluide; la thermacie lui est canoniquement conjuguée dans l'espace-temps.* »

On remarquera que (35) s'écrit aussi :

$$(37) \qquad v^\lambda\sigma_{\lambda\mu} = -\,\mathrm{T}\partial_\mu\mathscr{S} \;\Rightarrow\; X_{(t)}\sigma_{\lambda\mu} \neq 0 \text{ (en général)}$$

où $X_{(t)}$ est la dérivation de Lie associée au champ de vitesses v^λ. Ce dernier n'est donc *pas dynamique* en général, mais *il admet un facteur intégrant, qui est la température réciproque* $\theta = \sqrt{\theta^\lambda\theta_\lambda} = \mathrm{T}^{-1}$.

3.3. — Au potentiel π_λ de (30) correspond un lagrangien symplectique $\mathscr{L}$:

$$(38) \qquad \frac{d\mathscr{I}}{d\tau} = \mathscr{L} = \theta^\lambda\pi_\lambda - \mathscr{S} = \theta(1 + \mathscr{H}) - \mathscr{S} = \frac{1 + \mathscr{G}}{\mathrm{T}} = \boxed{\theta + \psi = \mathscr{L}}$$

où ψ est le « potentiel thermodynamique » classique. D'où le théorème IV :

« *La somme de la température réciproque et du potentiel thermodynamique constitue le lagrangien symplectique.* »

D'où le système (18) des *équations symplectiques de Lagrange* :

$$(39) \qquad \boxed{X_{(\tau)}\,[(1 + \mathscr{H})v_\lambda] = \partial_\lambda(\theta + \mathscr{G}\theta)}$$

c.-à-d. :

$$(40) \qquad X_{(\tau)}\,[(1 + \mathscr{H})v_\lambda - \partial_\lambda\mathscr{I}] = 0$$

ce qui donne le théorème V (réciproque du « théorème de Kelvin », voir 4.7 ci-après) :

« *L'énergie-impulsion spécifique* π^*_λ *est conservative, au sens de la dérivation de Lie selon le champ* θ_λ; *c'est un potentiel standard pour* $\sigma_{\lambda\mu}$. »

3.4. — Des calculs élémentaires ramènent (35), (39), (40) à des écritures plus familières (*) :

$$\boxed{\mu \frac{d}{dt}[(1+\mathscr{H})v_\lambda] = \partial_\lambda p} \tag{41}$$

$$\boxed{(\rho + p)\frac{d}{dt} v_\lambda = \underset{\sim}{\partial_\lambda} p} \tag{42}$$

Dans (42), est apparue d'elle-même la *dérivée transverse de Cattaneo* :

$$\underset{\sim}{\partial_\lambda} = \underset{\sim}{\delta^\mu_\lambda}\partial_\mu ; \quad \underset{\sim}{\delta^\mu_\lambda} = \delta^\mu_\lambda - v^\mu v_\lambda = \text{projecteur d'espace} \tag{43}$$

§ 4. — FLUIDE BAROTROPE

4.1. — Nous dirons qu'un fluide est **barotrope** lorsque son champ v^λ de *vitesses matérielles* est *dynamique* pour la 2-forme $\sigma_{\lambda\mu}$:

$$\boxed{X_{(t)}\sigma_{\lambda\mu} = 0} \tag{44}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\exists\, \mathscr{M} : v^\lambda \sigma_{\lambda\mu} = -\,\partial_\mu \mathscr{M}} \tag{45}$$

$$\boxed{\exists\, \mathscr{N} : X_{(t)}\pi_\lambda = \partial_\lambda \mathscr{N}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathscr{M}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{M} + \mathscr{N} = v^\lambda \pi_\lambda = 1 + \mathscr{H} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{N} = 1 + \mathscr{H} - \mathscr{M} \tag{46}$$

En conséquence, il existe un hamiltonien symplectique $\mathscr{M}$, *canoniquement conjugué au temps propre* t; c'est une intégrale première du mouvement.

4.2. — Pour la généralité de l'exposé, nous pouvons abandonner l'hypothèse d'adiabasie; le fluide exécute alors des échanges (réversibles, toutefois) selon la relation (11) où l'on posera :

$$\mathscr{F} = \dot{\varphi}/\dot{\mu} = -\frac{d\mathscr{S}}{dt} = \text{flux spécifique} \tag{47}$$

$\mathscr{S}$ et τ seront toujours canoniquement conjuguées, et il en sera encore de même pour les intégrales premières $\mathscr{B}$ et α. Donc $\mathscr{M}$ ne dépendra que de $\mathscr{S}$ et de τ, et l'on aura les *équations canoniques* :

$$\frac{\partial \mathscr{M}}{\partial \mathscr{S}} = \frac{d\tau}{dt} = T; \quad \frac{\partial \mathscr{M}}{\partial \tau} = -\frac{d\mathscr{S}}{dt} = \mathscr{F}; \quad \frac{\partial \mathscr{M}}{\partial \mathscr{B}} = \frac{d\alpha}{dt} = 0 = -\frac{d\mathscr{B}}{dt} = \frac{\partial \mathscr{M}}{\partial \alpha} \tag{48}$$

(*) Voir n° 5.4, in fine.

(49) $$\Rightarrow \quad \partial_\lambda \mathscr{M} = \mathrm{T}\partial_\lambda \mathscr{S} + \mathscr{F}\partial_\lambda \tau$$

(50) $$\Rightarrow \quad \partial_\lambda \mathscr{N} = \partial_\lambda(\mathscr{H} - \mathscr{M}) = \mathscr{V}\partial_\lambda p - \mathscr{F} \,.\, \partial_\lambda \tau$$

Donc $\mathscr{N}$ est une fonction de p et de τ seulement, — ou une fonction de p seulement si le fluide est adiabatique. Les équations lagrangiennes (46) du mouvement seront donc, pour un *fluide barotrope* :

(51) $$\mathrm{X}_{(t)}\,[(1 + \mathscr{H})v_\lambda] = \mathscr{V} \,.\, \partial_\lambda p - \mathscr{F} \,.\, \mathrm{T}_\lambda$$

Le covecteur T_λ de température figurera donc chaque fois que $\mathscr{F} \neq 0$.

4.4. — Un fluide relativiste sera **stationnaire** pour un système (v'^λ) de lignes de temps, si l'on a

(52)-(53) $$\boxed{\mathrm{X}_{(t')}\pi_\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{X}_{(t')}\mathscr{M} = \frac{d'}{dt'}\,\mathscr{M} = 0}$$

$\mathrm{X}_{(t')}$ étant la dérivation de Lie associée au système $d'x^\lambda = v'^\lambda \,.\, dt'$; on a donc $\mathrm{X}_{(t')}v'^\lambda = 0$, $\Rightarrow$

(54) $$\mathrm{X}_{(t')}(v'^\lambda\pi_\lambda) = \frac{d'}{dt'}\,[(1 + \mathscr{H}) \,.\, \mathrm{ch}\,\varphi] = 0$$

où

(55) $$\mathrm{ch}\,\varphi \overset{\text{déf}}{=} v'^\lambda \,.\, v_\lambda$$

Donc $[(1 + \mathscr{H})\,\mathrm{ch}\,\varphi]$ est stationnaire, mais il n'en va pas de même pour $\mathscr{N}$, contrairement à ce qui se passe pour un fluide non relativiste.

Or, (52) donne identiquement, d'après le théorème de Cartan sur la dérivée de Lie des p-formes :

(56) $$0 = \mathrm{X}_{(t')}\pi_\lambda = v'^\lambda\sigma_{\lambda\mu} + \partial_\lambda\,[(1 + \mathscr{H})\,\mathrm{ch}\,\varphi]$$

Et ainsi $[(1 + \mathscr{H})\,\mathrm{ch}\,\varphi]$ est le hamiltonien symplectique associé au champ v'^λ (pour lequel π_λ est un potentiel symplectique *standard*).

D'après (45) et (53), il vient

(57) $$v'^\lambda\sigma_{\lambda\mu}v^\mu = \frac{d'}{dt'}\,\mathscr{M} = 0$$

D'où, d'après (56) :

(58) $$\boxed{\frac{d}{dt}\,[(1 + \mathscr{H})\,\mathrm{ch}\,\varphi] = 0}$$

C'est le premier théorème de Bernouilli, transposé en Relativité. En effet, à l'approximation newtonienne, $\mathrm{ch}\,\varphi \cong a + \mathcal{T}/c^2$, où $\mathcal{T}$ est l'énergie cinétique spécifique, relativement au système (v'^λ).

4.5. — Un fluide relativiste sera irrotationnel si les deux grandeurs $\mathscr{B}$ et α de Schmid sont des *constantes globales* :

(59) $$\boxed{\partial_\lambda\mathscr{B} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_\mu\alpha = 0}$$

$\Rightarrow$

(60) $$\boxed{\sigma_{\lambda\mu} = \partial_\lambda\mathscr{S} \,.\, \partial_\mu\tau - \partial_\mu\mathscr{S} \,.\, \partial_\lambda\tau}$$

La 2-forme $\sigma_{\lambda\mu}$ est alors singulière, et son rang est toujours égal à 2 : En effet, le gradient de $\mathscr{S}$ est du genre espace et celui de τ est du genre temps; ils ne seront donc jamais colinéaires. Pour un fluide *irrotationnel*, la variété V d'univers n'est que *présymplectique* (σ fermée, de rang constant $= 2$).

4.6. — Si le fluide est **irrotationnel et barotrope,** la relation (60) est remplacée par

$$\boxed{\sigma_{\lambda\mu} = \partial_\lambda \mathscr{M} \,.\, \partial_\mu t - \partial_\mu \mathscr{M} \,.\, \partial_\lambda t} \tag{61}$$

où $t(\bar{x})$ désigne une hypersurface isochrone propre. A noter que la barotropie suppose toujours l'existence des isochrones propres sur tout morceau barotrope $\mathrm{M} \subset \mathrm{V}$.

Supposons enfin qu'un tel fluide soit en outre **stationnaire** pour (v'^λ). Comme on a :

$$v'^\lambda \,.\, \partial_\lambda t = \frac{d't}{dt'} = (\operatorname{ch} \varphi)^{-1}, \tag{62}$$

il vient alors, d'après (56), (61) et (45) :

$$-\,\partial_\mu\,[(1 + \mathscr{H}) \operatorname{ch} \varphi] = v'^\lambda \sigma_{\lambda\mu} = -\operatorname{ch} \varphi \,.\, \partial_\mu \mathscr{M} = \operatorname{ch} \varphi \,.\, v^\lambda \sigma_{\lambda\mu} \tag{63}$$

Par conséquent :

1° — Le vecteur $(v'^\lambda - v^\lambda \operatorname{ch} \varphi)$ appartient au noyau de $\sigma_{\lambda\mu}$; ce vecteur vaut

$$v'^\lambda = (\delta^\lambda_\mu - v^\lambda v_\mu) \,.\, v'^\mu \tag{64}$$

C'est la composante de v'^λ selon l'espace physique localement associé à (v^λ).

2° — La relation (63) donne aussi :

$$\boxed{\partial_\lambda\,[(1 + \mathscr{H}) \operatorname{ch} \varphi] - \operatorname{ch} \varphi \,.\, \partial_\lambda \mathscr{M} = 0} \tag{65}$$

Donc : a) $\mathscr{H}' = (1 + \mathscr{H}) \operatorname{ch} \varphi$ est fonction de $\mathscr{M}$ seulement, avec $\operatorname{ch} \varphi = \dfrac{\partial \mathscr{H}'}{\partial \mathscr{M}}$; b) la transformée de Legendre $(\mathscr{H}' - \mathscr{M} \operatorname{ch} \varphi)$ est fonction de $\operatorname{ch} \varphi$ seulement, et il en sera de même pour $1 + \mathscr{H} - \mathscr{M} = \mathscr{N}$; autrement dit :

$$\boxed{\mathscr{N} + f(\operatorname{ch} \varphi) = \mathscr{W}} \qquad (\mathscr{W} = c^{te} \text{ globale}) \tag{66}$$

C'est le second théorème de Bernouilli, transposé en Relativité. Car à l'approximation newtonienne, (65) donne $\partial_\lambda(\mathscr{N} + \mathscr{T}) = 0$, c.-à-d.

$$\mathscr{N} + \mathscr{T} = \mathscr{W} = c^{te} \text{ globale.}$$

4.7. — Enfin, le théorème de Kelvin n'est qu'une simple conséquence du symplectisme; il nous dit que :

$$\text{pour un fluide adiabatique : } \frac{d}{d\tau} \oint_{\bar{\Lambda}} \pi_\lambda \delta x^\lambda = \oint_\Lambda (\mathrm{X}_{(\tau)} \pi_\lambda) \delta x^\lambda = 0 \qquad \forall \Lambda \tag{66}$$

$$\text{pour un fluide barotrope : } \frac{d}{dt} \oint_\Gamma \pi_\lambda \delta x^\lambda = \oint_\Gamma (\mathrm{X}^{(t)} \pi_\lambda) \delta x^\lambda = 0 \qquad \forall \Gamma \tag{67}$$

où les deux courbes fermées sont l'une (Λ) isothermacique, et l'autre (Γ) isochrone propre.

§ 5. — AUTRES FLUIDES

La méthode symplectico-variationnelle s'applique évidement à d'autres cas. Signalons ici, fort brièvement :

5.1. — **Le fluide non relativiste** : La lagrangienne $\underset{\bullet}{\Lambda}$ doit être *invariante pour le groupe de Galilée*. Pour la construire, il faut introduire :

a) le covecteur $\underline{w} = [0, 0, 0, 1]$, *invariant galiléen* (strates d'espace);

b) le contravecteur $\bar{c} = [c^1, c^2, c^3, 1] = c^{te}$, qui matérialise un *repère* (c^λ) *physique galiléen, privilégié et invariable*, par rapport auquel se calculera l'énergie cinétique *invariante* $\mathcal{T}$; pour un exposé simplifié, on prendra $\bar{c} = [0, 0, 0, 1]$, l'observateur s'identifiant ainsi *momentanément* à (c^λ).

Alors, on choisira :

(68) $\underset{\bullet}{\Lambda} \stackrel{\text{déf}}{=} \underset{\bullet}{\mu} v^\lambda [\mathscr{C}_\lambda + (\mathcal{T} + \mathscr{E} + \mathscr{U})w_\lambda - (\mathscr{S}\partial_\lambda\tau + \mathscr{B}\partial_\lambda\alpha + \partial_\lambda\mathscr{J})] + \underset{\bullet}{p}\,[v^\lambda w_\lambda - 1]$

avec :

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathscr{S}, \mathscr{V}) = \text{fonction donnée}$$

$\mathscr{U}$ est le potentiel massique, et $\mathscr{C}_i = c_i - v_i$, $\mathscr{C}_4 = \vec{c}\,.\,\vec{v} - \vec{c}^2$, d'où $c^\lambda\mathscr{C}_\lambda = 0$.

5.2. — **Le fluide relativiste électrisé non thermique** : On choisira :

(69) $\underset{\bullet}{\Lambda} \stackrel{\text{déf}}{=} \underset{\bullet}{\varepsilon}\,[\mathscr{M}\sqrt{v^\lambda v_\lambda} + \mathscr{A}_\lambda v^\lambda - v_\lambda(\mathscr{S}\partial_\lambda\tau + \mathscr{B}\partial_\lambda\alpha + \partial_\lambda\mathscr{J})] + \underset{\bullet}{p}\,[\sqrt{v^\lambda v_\lambda} - 1]$

avec :

$$\mathscr{M} = \mathscr{M}(\mathscr{S}, \tau)$$

$\mathscr{A}_\lambda$ est le potentiel-vecteur électromagnétique. Donc, attention : *ici, les majuscules cursives désignent des grandeurs rapportées à l'unité de charge*; ainsi, $\underset{\bullet}{\varepsilon}$ est la *densité électrique*, et le hamiltonien $\mathscr{M}$ est le quotient $\underset{\bullet}{\mu}/\underset{\bullet}{\varepsilon}$, lequel est une intégrale première. Si les isochrones existent, alors $\mathscr{M} = \mathscr{S} \Rightarrow \dot{\tau} = t$.

On notera que le multiplicateur $\mathscr{J}$ est ici la « fonction de jauge » :

$$\mathscr{A}_\lambda \stackrel{\text{éq}}{=} \mathscr{A}_\lambda - \partial_\lambda\mathscr{J}.$$

En imposant la présence de $\mathscr{J}$, *l'invariance de jauge implique la conservation de l'électricité* :

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta\mathscr{J}} = 0 \Rightarrow \partial_\lambda(\underset{\bullet}{\varepsilon} v^\lambda) = \underset{\bullet}{0}$$

5.3. — Une conclusion semblable se présente à propos du fluide non électrisé, et elle apporte un point de vue assez nouveau : La fonction d'action $\mathscr{J}$ est une « fonction de jauge », et la conservation de la matière proprement dite est la conséquence de cette « invariance de jauge ».

Dans les deux cas, — conservation de la matière et conservation de l'électricité, — *la théorie symplectique donne une même signification à l'impression si peu opportune d'« invariance de jauge » : celle-ci est rigoureusement synonyme de « invariance de la 2-forme symplectique* $\sigma_{\lambda\mu}$ » (*pour les changements de potentiel symplectique* : $\pi_\lambda \to \pi_\lambda + \partial_\lambda f$).

5.4. — On trouvera une *bibliographie détaillée*, relative à divers travaux récents, dans B. F. Schutz Jr, Phys. Rev. D., Vol. 2, N° 12, 15 décembre 1970. Cet auteur emploie la méthode des « potentiels de vitesse », laquelle est symplectique dans son fond, — même si elle ne l'est pas explicitement dans sa forme actuelle.