Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 41e année, n° 1-2, 1972, pp. 31-39

THÉORIE SYMPLECTIQUE DU FLUIDE PARFAIT RELATIVISTE (*)

par P. V. GROSJEAN
Professeur à l'Université de Mons
Belgique

SUMMARY

We intend to show that :

1° The existence of an adiabatic perfect fluid, in the spacetime V of the special relativity, gives to V the structure of a four-dimensional symplectic manifold.

The equations of motion of a particle are then *symplectic* hamiltonian or lagrangian equations, where the descriptive parameter τ is the Van Dantzig's and Schmid's « thermasy », i.e. a function of which the time rate of change is the relativistic temperature $T = \frac{d\tau}{dt}$.

The specific entropy $\mathscr{S}$ acts as a symplectic hamiltonian, to which the thermasy τ is canonically conjugated *in the spacetime* V. This hamiltonian $\mathscr{S}$ is associated with the symplectic lagrangian $\mathscr{L} = \theta + \psi$, where $\theta = T^{-1}$ is the reciprocal temperature and ψ the thermodynamical potential $\mathscr{G}/T$ ($\mathscr{G}$ being the free energy of Gibbs).

2° If the fluid is barotropic, but not necessarily adiabatic, there exists another hamiltonian $\mathscr{M}$, canonically conjugated (in V) to the proper time t of the fluid particle. And $\mathscr{M}$ is associated with the lagrangian $\mathscr{N} = 1 + \mathscr{H} - \mathscr{M}$, where $\mathscr{H}$ is the enthalpy.

The symplectic formalism leads directly to covariantive relativistic statements of Bernouilli's two theorems and of Kelvin's theorem on circulation.

Always through the same methods, the relativistic notions of « steady flow » and of « irrotational flow » will have been very easily defined, in a covariantive way.

§ 1. — THÉORIE VARIATIONNELLE

1.1. — Dans tout ce qui suivra : 1° — Les lettres sous-pointées désigneront des densités, au sens physique et au sens tensoriel du terme; $\underset{\cdot}{g}$ sera la *densité métrique fondamentale* et $\underset{\cdot}{\mu}$ la *densité de matière*. 2° — Les majuscules cursives désigneront des grandeurs « spécifiques », c'est-à-dire ramenées à l'unité de masse; ainsi le *volume spécifique* sera :

$$\mathscr{V} = \underset{\cdot}{g}/\underset{\cdot}{\mu} = \mu^{-1} \tag{1}$$

A toute grandeur spécifique $\mathscr{A}$ correspond une densité $\underset{\cdot}{a} = \mathscr{A}\underset{\cdot}{\mu}$.

1.2. — La seule donnée du problème est l'*énergie interne* $\mathscr{E}$ fonction supposée connue de $\mathscr{V}$ et de l'*entropie* $\mathscr{S}$. Cette énergie s'additionnera à l'*énergie matérielle spécifique*, — qui est $c^2 = 1$, — pour donner l'énergie totale $(1 + \mathscr{E})$, de densité

$$\underset{\cdot}{\rho} = \underset{\cdot}{\mu}(1 + \mathscr{E}) = \underset{\cdot}{\mu} + \underset{\cdot}{e} \tag{2}$$

(*) Communiquée à la « Conference on Relativity and Related Topics », Bruxelles, décembre 1971.

Présenté par P. Ledoux, le 20 janvier 1972.