

DISTRIBUTIVE SEMILATTICES AND BOOLEAN LATTICES

by J. C. VARLET (*)

RÉSUMÉ

Nous montrons que, dans la définition classique d'un lattis de Boole comme lattis distributif complémenté, le mot lattis peut être remplacé par demi-lattis. La notion de 0-distributivité, introduite dans [9], est appliquée ici aux \wedge -demi-lattis et caractérisée comme suit : un \wedge -demi-lattis borné est 0-distributif si et seulement si tout filtre maximal est premier. Le théorème de séparation dû à Stone est étendu aux demi-lattis : un \wedge -demi-lattis filtrant supérieurement est distributif si et seulement si tout couple formé d'un filtre et d'un idéal disjoints peut être séparé par un filtre premier. Enfin il est établi que le théorème de Nachbin (un lattis distributif borné est booléen si et seulement si filtres premiers et filtres maximaux coïncident) reste vrai si l'on substitue à l'adjectif distributif les mots « très faiblement complémenté », c'est-à-dire : l'idéal zéro est le noyau d'une seule congruence, l'identité.

1. INTRODUCTION

It is well known (and the result is due to Nachbin [7]) that a bounded distributive lattice is Boolean if and only if every prime filter is maximal. In a recent paper [1], D. Adams tried to weaken Nachbin's conditions and obtained the following result : a lattice L is Boolean if it satisfies the conditions

- (a) L is bounded;
- (b) L is weakly complemented;
- (c) any ideal of L is maximal if and only if it is prime;
- (d) any filter of L is maximal if and only if it is prime.

Certainly the hypothesis of distributivity is suppressed, but conditions (c) and (d) are both very strong since double-sided. Consequently it seems inadequate to claim that Nachbin's condition has been replaced by a « much weaker condition », owing to the supplementary fact that weak complementedness and distributivity are completely independent.

We shall show that the previous conditions are redundant : (a), (b) and (d) are sufficient and (c) can even be weakened. More precisely, if in Nachbin's statement we replace distributivity by 0-distributivity, a weakened form that we introduced in [9], the additional assumption of very weak complementedness is needed (theorem 4).

But in the beginning of our paper we are concerned with semilattices. We first show that a bounded \wedge -semilattice which is distributive and complemented is a Boolean lattice (theorem 1). Then the meaning of 0-distributivity in an up-directed

Manuscrit reçu le 17 février 1971.

(*) Institut de Mathématique, 15, avenue des Tilleuls, 4000 Liège.