Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 33e année, nº 9-10, 1964, pp. 518-519

SUR LES NOMBRES A LA FOIS TRIANGULAIRES, CARRÉS ET PENTAGONAUX

par A. ROTKIEWICZ

Le but de cette note est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Il existe seulement un nombre fini des nombres qui sont à la fois triangulaires, carrés et pentagonaux.*

DÉMONSTRATION. — L'équation $\frac{x(x+1)}{2} = z^2$ donne $1 + 8z^2 = (2x+1)^2$ et, en posant $2z = t$, $2x + 1 = r$, on aura

$$1 + 2t^2 = r^2, \tag{1}$$

où t et r sont des nombres naturels. Or, l'équation $\frac{y(3y-1)}{2} = z^2$ donne $1 + 24z^2 = (6y-1)^2$, donc, en posant $6y - 1 = s$,

$$1 + 6t^2 = s^2, \tag{2}$$

où s est un nombre naturel.

Il résulte de (1) que $3 + 6t^2 = 3r^2$ et, d'après (2), on trouve $3r^2 - s^2 = 2$, d'où $(r, s) \mid 2$ et, comme, d'après (1), $2 \nmid r$, on a $(r, s) = 1$. Or, de (1) et (2) on trouve

$$s^2 - r^2 = (2t)^2, \tag{3}$$

d'où $(s - r)(s + r) = (2t)^2$, et, comme $(r, s) = 1$, il en résulte que

$$s - r = 2m^2 \text{ et } s + r = 2n^2, \tag{4}$$

où m et n sont des nombres naturels.

D'après (3) et (4) on trouve $r = n^2 - m^2$ et $t = mn$. Or, d'après (1), on a $r^2 - 2t^2 = 1$. On a donc $(n^2 - m^2)^2 - 2n^2m^2 = 1$, donc $3m^4 + 1 = (n^2 - 2m^2)^2$ et $3m^4 + 1 = g^2$, où g est un nombre naturel.

Présenté par L. Godeaux, le 15 octobre 1964.

Or, l'équation $3m^4 + 1 = g^2$ n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres naturels m et g, ce qui résulte, par exemple, du théorème T suivant (voir [1], p. 170) :

Si a, b, c et d sont des nombres entiers, $a \neq 0$, $d \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$ et n est un entier $\geqslant 3$, l'équation $ay^2 + by + c = dx^n$ n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers x et y.

Il n'existe donc qu'un nombre fini de solutions des équations (3) et (4) en nombres naturels s, r et t et, par conséquent, il n'existe qu'un nombre fini des nombres z. Notre théorème est ainsi démontré.

TRAVAIL CITÉ

[1] L. E. Dickson, *Introduction to the Theory of Numbers*, New York, 1957.