Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 33e année, no 9-10, 1964, pp. 530-539

ÉLÉMENTS ALÉATOIRES DIRECTS (é. a. d.) À VALEURS DANS UNE INTÉGRALE DIRECTE TOPOLOGIQUE

par JEAN TH. HAÏNIS

I. Soit l'espace de Probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et l'espace T localement compact et μ une mesure positive sur T.

Nous considerons l'application

$$(T \times \Omega, \mathscr{F} \times \mathscr{A}) \xrightarrow{X_t} H_t$$

où H_t pour chaque t est un espace de Hilbert, à base dénombrable.

On suppose que, pour chaque t fixé, cette application est un élément aléatoire à valeurs dans l'espace H_t, c'est-à-dire $X_t(\omega) \in H_t$.

On considère l'intégrale directe des espaces Hilbertiens H_t, soit $\mathscr{H} = \int_T^{\oplus} H_t . d\mu(t)$.

Il est connu que, l'espace $\mathscr{H}$ en est aussi un espace de Hilbert, séparé, sous ensemble du produit $\prod_{t \in T} H_t$. (voir DIXMIER, pages 139-147).

Aussi nous considérons l'intégrale directe des applications X_t, soit $X = \int_T^{\oplus} X_t d\mu(t)$ — s'il existe — qui est aussi un sous ensemble du produit $\prod_{t \in T} X_t$ avec les propriétés suivantes.

1. $aX = \int_T^{\oplus} aX_t d\mu(t)$.

2. $X + Y = \int_T^{\oplus} \{X_t + Y_t\} d\mu(t)$.

Maintenant soit l'application.

$$(\mathrm{T}\times\Omega,\ \mathscr{F}\times\mathscr{A}) \xrightarrow{\ \mathrm{X}=\int_{\mathrm{T}}^{\oplus}\mathrm{X}_t d\mu(t)\ } \mathscr{H}=\int_{\mathrm{T}}^{\oplus}\mathrm{H}_t d\mu(t)$$

qui est définie comme suit

a) Pour chaque ω, $\mathrm{X}(\omega)=\int_{\mathrm{T}}^{\oplus}\mathrm{X}_t(\omega)d\mu(t)\in\mathscr{H}$.

b) Pour chaque section de l'application $\mathrm{X}=\int_{\mathrm{T}}^{\oplus}\mathrm{X}_t d\mu(t)$ c'est-à-dire X_t, on a $\mathrm{X}_t(\omega)\in\mathrm{H}_t$ et que :

$$\int_{\mathrm{T}}\|\mathrm{X}_t(\omega)\|^2 d\mu(t) < +\infty.$$

II. Mesurabilité.

A. *Mesurabilité faible de l'application* $\mathrm{X}=\int_{\mathrm{T}}^{\oplus}\mathrm{X}_t d\mu(t)$.

Soit d'abord l'application

$$(\mathrm{T}\times\Omega,\ \mathscr{F}\times\mathscr{A}) \xrightarrow{\mathrm{X}_t} \mathrm{H}_t.$$

On dit que l'application X_t est faiblement mesurable (t : fixé) si, pour chaque η_t (fixé) $\in\mathrm{H}_t$ la fonction noumerique

$$\mathrm{F}_t(\omega)=\langle\eta_t,\ \mathrm{X}_t(\omega)\rangle \text{ est mesurable.}$$

On dit que l'application

$(\mathrm{T}\times\Omega,\ \mathscr{F}\times\mathscr{A}) \xrightarrow{\mathrm{X}} \mathscr{H}$ est *faiblement mesurable*, si chaque section X_t est une application faiblement mesurable.

B. *Mesurabilité de l'application* $\mathrm{X}=\int_{\mathrm{T}}^{\oplus}\mathrm{X}_t d\mu(t)$.

Soit l'application :

$$(\mathrm{T}\times\Omega,\mathscr{F}\times\mathscr{A}) \xrightarrow{\ \mathrm{X}=\int_{\mathrm{T}}^{\oplus}\mathrm{X}_t d\mu(t)\ } \mathscr{H}=\int_{\mathrm{T}}^{\oplus}\mathrm{H}_t d\mu(t).$$

et Ξ en vecteur quelconque, mais fixé dans l'espace $\mathscr{H}$. On considère le produit hermitique $\langle\int_{\mathrm{T}}^{\oplus}\mathrm{X}_t(\omega)d\mu(t),\ \Xi\rangle_{\mathscr{H}}$, et soit une section de ce produit $\langle\mathrm{X}_t(\omega),\ \Xi_t\rangle_{\mathrm{H}_t}=\mathrm{F}(t,\ \omega)$.

Si la fonction $F(t, \omega)$ est mesurable par rapport à $(T \times \Omega, \mathscr{F} \times \mathscr{A})$ l'application $X = \int_T^{\oplus} X_t d\mu(t)$ s'appelle *mesurable.*

Définition. — Une telle application mesurable s'appelle *élément aléatoire direct* (é. a. d.) à valeurs dans l'intégrale directe topologique des espaces Hilbertiens H_t.

Cas particuliers.

a) Si pour chaque $t \in T$ les espaces $H_t \equiv H_0$, il est démontré dans ce cas là que : $\int_T^{\oplus} H_t d\mu(t) = L^2_{H_0}(T, \mu)$ et l'é. a. d.

$X = \int_T^{\oplus} X_t d\mu(t)$ donne pour chaque t un élément aléatoire qui prend les valeurs dans l'espace $L^2_{H_0}(T, \mu)$, alors nous avons une fonction aléatoire définie sur $(T \times \Omega, \mathscr{F} \times \mathscr{A})$ à valeurs dans l'espace $L^2_{H_0}(T, \mu)$ (voir DIXMIER, page 147, 2).

b) Si encore les applications $X_t \equiv X_0$ pour chaque $t \in T$, dans ce cas on a : $\Omega \xrightarrow{X_0} L^2_{H_0}(T, \mu)$ c'est-à-dire nous avons un élément aléatoire défini sur $(\Omega, \mathscr{A})$ à valeurs dans l'espace $L^2_{H_0}(T, \mu)$.

C. *Définition du produit hermitique et de la norme dans l'espace* $\mathscr{H} = \int_T^{\oplus} H_t d\mu(t)$.

Soit l'application : $(T \times \Omega, \mathscr{F} \times \mathscr{A}) \xrightarrow{X} \mathscr{H}$.

Pour chaque ω on a : $X(\omega) = \int_T^{\oplus} X_t(\omega) d\mu(t) \in \mathscr{H}$.

Soit encore une autre application dans l'espace $\mathscr{H}$

$$Y(\omega) = \int_T^{\oplus} Y_t(\omega) d\mu(t) \in \mathscr{H}.$$

On définit le produit hermitique des $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ par la relation.

$$\langle X(\omega), Y(\omega) \rangle_{\mathscr{H}} = \int_T \langle X_t(\omega), Y_t(\omega) \rangle_{H_t} d\mu(t)$$

et la norme : $\| X(\omega) \|^2_{\mathscr{H}} = \int_T \| X_t(\omega) \|^2_{H_t} d\mu(t) < \infty.$

III. Espérance mathématique directe d'un élément aléatoire direct.

Soit l'é. a. d. $X = \int_T^{\oplus} X_t d\mu(t)$ défini sur $(T \times \Omega, \mathscr{F} \times \mathscr{A})$ à valeurs dans l'espace $\mathscr{H} = \int_T^{\oplus} H_t d\mu(t)$.

S'il existe un élément W dans l'espace $\mathscr{H}$ tel que nous ayons $\langle W, \Xi\rangle = E\langle \int_T^{\oplus} X_t(\omega)d\mu(t), \Xi\rangle$ pour chauque $\Xi \in \mathscr{H}$ cet élément W s'appelle *espérance mathématique directe* (e. m. d.) de l'é. a. d. $X = \int_T^{\oplus} X_t d\mu$ et la note par $E\left(\int_T^{\oplus} X_t d\mu(t)\right)$ où EX.

Théorème. — Si l'é. a. d. $X = \int_T^{\oplus} X_t d\mu(t)$ est une fonction mesurable, on a :

$$E\left[\int_T^{\oplus} X_t d\mu(t)\right] = \int_T^{\oplus} EX_t d\mu(t).$$

Démonstration. — D'après la définition de l'é. m. d. sur l'espace $\mathscr{H}$ nous avons :

$$\langle E\int_T^{\oplus} X_t d\mu(t), \Xi\rangle_{\mathscr{H}} = E\langle \int_T^{\oplus} X_t(\omega)d\mu(t), \Xi\rangle_{\mathscr{H}} \ \forall\Xi \in \mathscr{H} \ (1).$$

D'après la définition du produit hermitique sur l'espace $\mathscr{H}$ on a :

$$E\langle \int_T^{\oplus} X_t(\omega)d\mu(t), \ \Xi\rangle_{\mathscr{H}} = E\left[\int_T \langle X_t(\omega), \ \Xi_t\rangle_{H_t} d\mu(t)\right] \ (2).$$

La fonction $\langle X_t(\omega), \Xi_t\rangle$ est mesurable sur l'espace $(\mathscr{F} \times \Omega, \mathscr{F} \times \mathscr{A})$, alors on peut appliquer le théorème de Fubini et on a :

$$\begin{aligned} E\left[\int_T \langle X_t(\omega), \Xi_t\rangle_{H_t} d\mu(t)\right] &= \int_T E\langle X_t(\omega), \Xi_t\rangle_{H_t} d\mu(t) \\ &= \int_T \langle EX_t, \Xi_t\rangle_{H_t} d\mu(t) \\ &= \langle \int_T^{\oplus} (EX_t)d\mu(t), \Xi\rangle \ \forall\Xi \in \mathscr{H} \end{aligned}$$

Alors : $\mathrm{E}\int_{\mathrm{T}}^{\oplus} \mathrm{X}_t d\mu(t) = \int_{\mathrm{T}}^{\oplus} (\mathrm{EX}_t) d\mu(t)$.

Remarque. — Nous avons supposé l'existance de

$$\mathrm{E}\int_{\mathrm{T}}^{\oplus} \mathrm{X}_t d\mu(t) \Leftrightarrow \int_{\mathrm{T}} \| \mathrm{EX}_t \|^2 d\mu(t) < +\infty.$$

Théorème. — Si les fonctions $\mathrm{X} = \int_{\mathrm{T}}^{\oplus} \mathrm{X}_t d\mu(t)$ et $\mathrm{Y} = \int_{\mathrm{T}}^{\oplus} \mathrm{Y}_t d\mu(t)$ sont mesurables on a :

a) $\mathrm{E}[\lambda \int_{\mathrm{T}}^{\oplus} \mathrm{X}_t d\mu(t)] = \int_{\mathrm{T}}^{\oplus} \lambda(\mathrm{EX}_t) d\mu(t) \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

b) $\mathrm{E}[a \int_{\mathrm{T}}^{\oplus} \mathrm{X}_t d\mu(t) + b \int_{\mathrm{T}}^{\oplus} \mathrm{Y}_t d\mu(t)] =$

$$= \int_{\mathrm{T}}^{\oplus} [\mathrm{E}(a\mathrm{X}_t) + \mathrm{E}[b\mathrm{Y}_t)] d\mu(t) \quad \forall a, b \in \mathbb{C}.$$

a) *Remarque sur l'espérance mathématique directe.*

Si on prend une section de l'égalité

$\langle \mathrm{E}\int_{\mathrm{T}}^{\oplus} \mathrm{X}_t d\mu(t), \Xi \rangle = \mathrm{E} \langle \int_{\mathrm{T}}^{\oplus} \mathrm{X}_t d\mu(t), \ \Xi \rangle$ on a :

$\langle \mathrm{EX}_t, \ \Xi_t \rangle = \mathrm{E} \langle \mathrm{X}_t(\omega), \ \Xi_t \rangle \ \forall \ \Xi_t \in \mathrm{H}_t$.

C'est-à-dire le vecteur EX_t présente l'espérance mathématique d'é. a. X_t dans l'espace de Hilbert H_t.

b) *Remarque sur la mesurabilité.*

Dans le cas où $\mathrm{H}_t \equiv \mathrm{H}_0$ pour chaque $t \in \mathrm{T}'$, alors $\int_{\mathrm{T}}^{\oplus} \mathrm{H}_t d\mu(t) = \mathrm{L}^2_{\mathrm{H}_0}(\mathrm{T}', \mu)$; par conséquent nous avons la notion de la mesurabilité d'une fonction aléatoire.

Si $\mathrm{X}_t \equiv \mathrm{X}_0$ pour chaque $t \in \mathrm{T}$, nous avons la notion de la mesurabilité de l'application

$$\Omega \xrightarrow{\mathrm{X}_0} \mathrm{L}^2_{\mathrm{H}_0}(\mathrm{T}, \mu).$$

Proposition. — Si la fonction $X = \int_T^{\oplus} X_t d\mu(t)$ est mesurable, alors la fonction $\| X \|_{\mathscr{H}}$ en est aussi.

Démonstration. — Nous savons que :
$\| X(\omega) \|_{\mathscr{H}} = \sup | \langle X(\omega), \Xi_n \rangle |$ où Ξ_n est une suite dense dans l'espace $\mathscr{H} = \int_T^{\oplus} H_t d\mu(t)$.

On prend une section du produit $\langle X(\omega), \Xi_n \rangle$ soit $F(t, \omega) = \langle X_t(\omega), \Xi_{n_t} \rangle$ cette fonction par hypothèse est mesurable par rapport à $(T \times \Omega, \mathscr{F} \times \mathscr{A})$, alors $\sup | \langle X_t(\omega), \Xi_{n_t} \rangle | = \| X_t \|_{H_t}$ en est aussi. En conséquence la fonction $\| X \|_{\mathscr{H}}$ est mesurable (voir mesurabilité).

Théorème. — Si $X = \int_T^{\oplus} X_t d\mu(t)$ est mesurable et EX existe et $E \| X \| < +\infty$ alors :

$$\| EX \|_{\mathscr{H}} \leqq \int_T^{\oplus} E \| X_t \|_{H_t} d\mu(t).$$

Démonstration. — Nous savons (voir Mourier, page 7) que

$$\| EX \| \leqq E \| X \|_{\mathscr{H}} \leqq (E \| X \|^2)^{1/2} \qquad (1).$$

Mais $\| X(\omega) \|_{\mathscr{H}} = \left[\int_T \| X_t(\omega) \|_{H_t}^2 d\mu(t) \right]^{1/2}$ et la relation (1) s'écrit

$$\| EX \| \leqq E\left[\int_T \| X_t(\omega) \|_{H_t}^2 d\mu(t) \right]^{1/2}.$$

En vertu de la proposition précédente et du théorème de Fubini nous avons :

$$\| EX \| \leqq \left[\int_T E \| X_t \|_{H_t}^2 d\mu(t) \right]^{1/2}$$

IV. Opérateurs.

On suppose que pour chaque $t \in T$ on correspond un opérateur linéaire U_t dans l'espace H_t. S'il existe un opérateur linéaire borné U dans l'espace $\mathscr{H}$ tel que nous ayons :

$$U\left[\int_T^{\oplus} X_t(\omega) d\mu(t) \right] = \int_T^{\oplus} U_t X_t(\omega) d\mu(t) \text{ p. s. pour } \mu(t).$$

On appelle cet opérateur *intégrale directe des opérateurs* U_t et se note par $U = \int_T^\oplus U_t d\mu(t)$.

Théorème. — Soit $U = \int_T^\oplus U_t d\mu(t)$ l'intégrale directe des opérateurs $\{U_t\}$ sur l'espace $\mathscr{H}$.

Alors nous avons : $EU\int_T^\oplus X_t d\mu(t) = U\int_T^\oplus EX_t d\mu(t)$.

Démonstration. — Il est connu que dans un espace Hilbertien on a :
$EU_tX_t = U_tEX_t$ (voir Mourier, page 7)
donc

$$\int_T^\oplus (EU_tX_t)d\mu(t) = \int_T^\oplus (U_tEX_t)d\mu(t).$$

D'après le théorème de Fubini et de la définition d'opérateur direct nous avons :

$$\begin{aligned} E\left(\int_T^\oplus U_tX_t d\mu(t)\right) &= \int_T^\oplus (EU_tX_t)d\mu(t) \\ &= \int_T^\oplus U_tEX_t d\mu(t) \\ &= U\int_T^\oplus EX_t d\mu(t). \end{aligned}$$

Sur l'existence de l'espérance mathématique directe.

L'existence de l'é. m. d. $E\left[\int_T^\oplus X_t d\mu(t)\right]$ équivaut à

$$\int_T \| EX_t \|^2 d\mu(t) < +\infty \quad (1)$$

La condition (1) *entraîne l'existence de l'élément aléatoire direct*

$$\int_T^\oplus X_t(\omega)d\mu(t) \Leftrightarrow \int_T \| X_t(\omega) \|^2 d\mu(t) < +\infty.$$

En effet : nous avons d'après le théorème de Fubini que :

$$\int_{\Omega}\left[\int_{T}\| X_t(\omega) \|^2 d\mu(t)\right]dP(\omega) = \int_{T} E \| X_t(\omega) \|^2 d\mu(t) < +\infty.$$

En conséquence $\int_{T} \| X_t(\omega) \|^2 d\mu(t) < +\infty$ p. p. pour (ω).

V. Sur la convergence.

Théorème I. — Si la suite des é. a. $X_{n_t} \xrightarrow[\text{m. q.}]{\text{p. s.}(t)} X_t$ dans les espaces H_t.

Alors : $E\left[\int_{T}^{\oplus} X_{n_t} d\mu(t)\right] \to E\left[\int_{T}^{\oplus} X_t d\mu(t)\right]$ au sens de la métrique dans l'espace $\mathscr{H} = \int_{T}^{\oplus} H_t d\mu(t)$.

Démonstration. — Nous avons que :

$$\| E \int_{T}^{\oplus} X_{n_t} d\mu(t) - E \int_{T}^{\oplus} X_t d\mu(t) \|_{\mathscr{H}} = \| \int_{T}^{\oplus} E(X_{n_t} - X_t) d\mu(t) \|_{\mathscr{H}}$$

$$= \left[\int_{T} \| E(X_{n_t} - X_t) \|_{H_t}^2 d\mu(t)\right]^{1/2} \leqq \left[\int_{T} E \| X_{n_t} - X_t \|_{H_t}^2 d\mu(t)\right]^{1/2}.$$

La fonction $t \to E \| X_{n_t} - X_t \|^2$ reste bornée et tend vers zéro quand $(n \uparrow \infty)$ et d'après le théorème de Lebesque on a :

$$\int_{T} E \| X_{n_t} - X_t \|_{H_t}^2 d\mu(t) \to 0 \ (n \uparrow \infty).$$

Théorème II. — Si $\| X_{n_t} \| \leqq \| Y \| \in L_2$ p. s. pour $\mu(t)$

et $X_{n_t} \xrightarrow[\text{p. s.}]{P} X_t$, alors $\int_{T}^{\oplus} X_{n_t} d\mu(t) \xrightarrow{P} \int_{T}^{\oplus} X_t d\mu(t)$ dans $\mathscr{H}$.

Démonstration. — Nous avons que :

$$E \| \int_{T}^{\oplus} X_{n_t}(\omega) d\mu(t) - \int_{T}^{\oplus} X_t(\omega) d\mu(t) \| =$$

$$E\left[\int_{T} \| X_{n_t}(\omega) - X_t(\omega) \| d\mu(t)\right].$$

D'après le théorème de Fubini on a :

$$= \int_T E \| X_{n_t}(\omega) - X_t(\omega) \|^2 d\mu(t).$$

Les hypothèses entraînent que $E \| X_{n_t}(\omega) - X_t(\omega) \|^2 \to 0$ p. s. pour $\mu(t)$. (voir, Loève, page 164, Corollary 3).

En vertu du théorème de Lebresque on a :

$$\int_T E \| X_{n_t}(\omega) - X_t(\omega) \|^2 d\mu(t) \to 0.$$

Dans l'espace $\mathscr{H}$ nous avons :

$$P\left[\omega : \left\| \left(\int_T^{\oplus} X_{n_t}(\omega) - \int_T^{\oplus} X_t(\omega)\right) d\mu(t) \right\| \geqslant \varepsilon\right] \leqq$$

$$\leqq \frac{E \left\| \int_T^{\oplus} X_{n_t}(\omega) d\mu(t) - \int_T^{\oplus} X_t(\omega) d\mu(t) \right\|^2}{\varepsilon^2}$$

(Inégalité de Tchebichef)

qui tend vers zero si $n \uparrow \infty$.

Alors : $\int_T^{\oplus} X_{n_t}(\omega) d\mu(t) \xrightarrow{P} \int_T^{\oplus} X_t(\omega) d\mu(t).$

VI. Construction d'une H(*) algèbre sur l'espace

$$\mathscr{H} = \int_T^{\oplus} H_t d\mu(t).$$

On suppose que les espaces H_t sont H(*) « strar » algèbres de Banach. On peut définir une involution sur l'espace $\mathscr{H} = \int_T^{\oplus} H_t d\mu(t)$ qui devient aussi une H(*) algèbre.

Définitions :

A. Le produit de deux éléments aléatoires $X(\omega)$, $Y(\omega)$ dans $\mathscr{H}$ est défini par la relation.

$$X(\omega).Y(\omega) = \left[\int_T^{\oplus} X_t(\omega) d\mu(t)\right] . \left[\int_T^{\oplus} Y_t(\omega) d\mu(t)\right]$$

$$\underset{\text{defin.}}{=} \int_T^{\oplus} [X_t(\omega).Y_t(\omega)] d\mu(t).$$

B. L'involution est défini par

$$X(\omega) \to X^*(\omega) = \int_T^{\oplus} [X_t(\omega)^* d\mu(t).$$

On démontre facilement que l'espace $\mathscr{H}$ en est aussi une H($*$) algèbre.

On démontre que :

$$\left[E\left(\int_T^{\oplus} X_t d\mu(t)\right)\right]^* = E\left(\int_T^{\oplus} X_t^* d\mu(t)\right).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dixmier J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien*. Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[2] Loève M., *Probability Theory*. Van Nostrand, New-York, 1960.

[3] Mourier E., « Éléments aléatoires dans un espace de Banach ». Thèse I. H. P. Paris, 1954.

[4] Neveu J., *Bases mathématiques du calcul des Probabilités*. Masson, Paris, 1964.

Rue : 4A Olofytou
ANO PATISSIA
Athènes-Grèce.