Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 33e année, no 9-10, 1964, pp. 507-512

SUR LE COMPORTEMENT ASSOCIÉ ET LA RÉDUCTION DES SINGULARITÉS (Quatrième communication)

par L. DERWIDUÉ
Professeur à la Faculté Polytechnique de Mons,
Membre de la Société

RÉSUMÉ

Réponse à deux objections de M. B. Segre et étude élémentaire d'une question d'existence posée par l'une d'elles.

1. Dans l'analyse de la deuxième communication de même titre [1] qu'il a donnée aux Mathematical Reviews [2], M. B. Segre fait explicitement deux objections au raisonnement du § 1. L'une d'elles concerne la deuxième phrase de la p. 461 : « Si nous appliquons le raisonnement du no 3 de [3] à un point Q de γ de multiplicité $> s$ pour $\mathscr{V}$, nous trouvons que $\mathscr{V}'$ coupe le S_{u-k-1} de γ', image de Q, suivant une variété de dimension $v - k$; ... ». Il faut évidemment lire « ... de dimension $\geqslant v - k$; ... ». Cette dimension n'intervient d'ailleurs pas dans la suite du raisonnement et aurait pu être absente du texte.

2. La seconde objection est plus réelle, mais peut cependant être levée par une modification aisée du raisonnement. Elle concerne le no 2, p. 461, lequel doit être remplacé par le texte suivant :

« Soient A un point de δ, a le S_k tangent à γ en A, $\bar{a}$ le S_l tangent à δ en A, α un S_{k+1} passant par a et situé dans le S_u tangent à $\mathscr{U}$ en ce point, $\bar{\alpha}$ un S_{l+1} passant par $\bar{a}$ et appartenant à α.

Sur $\mathscr{U}$, introduisons une variété irréductible $\mathscr{W}$, de dimension $k + 1$, passant une fois par γ et tangente à α en A (par exemple, la section de $\mathscr{U}$ par un cône de dimension convenable de l'espace

Manuscrit reçu le 17 septembre 1964.

linéaire ambiant, projetant γ et tangent à α en A). Sur $\mathscr{U}'$, appelons $\mathscr{W}'$ l'image de $\mathscr{W}$ défalquée des composantes lieux de points fondamentaux éventuelles, et soit $\mathscr{A}'$ le S_{u-k-1} de γ', image de A. La correspondance entre les S_{k+1} passant par a, tangents en A à $\mathscr{U}$, et les points de $\mathscr{A}'$, est projective ; soit A′ le point image de α dans cette projectivité. Le lieu de A′, quand A décrit δ, défalqué de ses composantes lieux de points fondamentaux éventuelles, est une variété irréductible Δ', de dimension l, appartenant à la section de δ' par $\mathscr{W}'$, pour laquelle le point A′ correspondant au α de départ est simple. C'est de cet A′ qu'il sera dorénavant question.

Soient $\bar{a}'$ le S_l tangent à Δ' en A′, α' le S_{k+1} tangent à $\mathscr{W}'$ en A′, et $\bar{\alpha}'$ un S_{l+1} passant par $\bar{a}'$ et appartenant à α'. Il y a correspondance birationnelle entre δ' et Δ' d'une part, entre $\mathscr{W}$ et $\mathscr{W}'$ d'autre part, et dans ces correspondances, les points A et A′ sont biréguliers, bien que dans la correspondance entre $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}'$, A soit un point-base et A′ un point fondamental (voir les définitions p. 70 de [4], ou ci-dessous, n° 4). Il y a donc correspondance projective entre la gerbe des $\bar{\alpha}$ (ensemble des S_{l+1} passant par $\bar{a}$ et appartenant à α) et la gerbe des $\bar{\alpha}'$ (ensemble des S_{l+1} passant par $\bar{a}'$ et appartenant à α').

Appelons b' le $S_{u-k+l-1}$ tangent en A′ à δ'. b′ contient $\mathscr{A}'$ et est coupé par α' suivant $\bar{a}'$ (puisque Δ' fait partie de la section de δ' par $\mathscr{W}'$), lequel appartient de ce fait à $\mathscr{A}'$. Tout S_{u-k+l} passant par b' et situé dans le S_u tangent à $\mathscr{U}'$ en A′ rencontre donc α' suivant un $\bar{\alpha}'$. Si, sur $\mathscr{U}''$, $\mathscr{W}''$ désigne l'image de $\mathscr{W}'$ défalquée de ses composantes lieux de points fondamentaux éventuelles, et si $\mathscr{A}''$ désigne le S_{k-l} de δ'' correspondant à A′, il résulte de la dernière phrase que $\mathscr{W}''$ contient $\mathscr{A}''$ et qu'il existe une correspondance projective entre la gerbe des $\bar{\alpha}'$ et l'ensemble des points de $\mathscr{A}''$.

Bien entendu, ce qui vient d'être dit concernant α peut être répété pour chacun des ∞^{u-k-1} S_{k+1} passant par a et tangents à $\mathscr{U}$ en A ; le lieu des S_{k-l} de δ'' analogues à $\mathscr{A}''$ est une variété de dimension $u - l - 1$ dont les points sont dès lors en correspondance birationnelle sans exception avec les espaces $\bar{\alpha}$ de dimension $l + 1$ passant par $\bar{a}$ et tangents à $\mathscr{U}$ en A. Appelons ce lieu $\mathscr{B}''$.

Revenons maintenant à la variété $\mathscr{V}$ qui passe exactement t fois par tout point de δ. Le cône $\mathscr{C}$ tangent à $\mathscr{V}$ en A est un lieu de ∞^{v-l-1} S_{l+1} passant par $\bar{a}$. Il résulte de ce qui précède que $\mathscr{V}''$ coupe $\mathscr{B}''$ suivant une variété ponctuelle $\mathscr{C}''$, de dimension $v - l - 1$, en correspondance birationnelle sans exception avec $\mathscr{C}$. Comme la multiplicité d'un S_{l+1} de $\mathscr{C}$ est au plus l'ordre de $\mathscr{C}$ pour ce dernier, la multiplicité maximum des points de $\mathscr{C}''$ est donc $\leqslant$ à l'ordre de $\mathscr{C}$. Or, $\mathscr{C}''$ étant l'intersection de $\mathscr{V}''$ et de la variété δ'', la multiplicité d'un point de $\mathscr{C}''$ pour $\mathscr{V}''$ est au plus la multiplicité de ce point pour $\mathscr{C}''$, c'est-à-dire, de fait, la multiplicité de A pour $\mathscr{V}$. Le théorème est donc démontré. »

3. Signalons encore une confusion d'indices qui s'est glissée au deuxième alinéat du n° 3, p. 463. Il est plus correct de rédiger la deuxième phrase comme suit :

« Appelons $[W'_j]$ l'image de $[W_j]$ sur $\mathscr{U}'$, B'_{j+1} sa base si elle existe, et supposons que sur la section de $\mathscr{V}'$ par δ' se trouvent des sous-variétés comprenant éventuellement cette section, formant des composantes de certaines B'_{j+1} avec, bien entendu, $j < v - k$. »

Trois lignes plus bas, il faut lire $[W'_0]$ au lieu de $[W_0]$, et deux lignes plus bas encore, remplacer B_{j+1} par B'_{j+1}.

4. Voici comment M. B. Segre exprime sa seconde objection :

« Moreover, n° 2 utilizes an irreductible subvariety $\mathscr{W}$ of $\mathscr{U}$, of dimension $k + 1$, possessing a single point at each point of γ, without even doubting that such a $\mathscr{W}$ may not exist. However, if $k \geqslant 2$ and for a general choice of $\mathscr{U}$, γ, every $(k + 1)$-dimensional manifold of $\mathscr{U}$ containing γ must possess some singular point on γ [cf. the reviewer, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 35 (1953), 1-127, n° 49 ; MR 15, 822 ; errata, MR 15, 1140] ; hence, the introduction of the above variety $\mathscr{W}$ is contradictory. »

Bien qu'il soit aisé de parer à ce reproche (on l'a vu au n° 2 ci-dessus), il est utile d'en étudier plus soigneusement la teneur sans sortir du cadre « élémentaire » dans lequel, selon nous, doit nécessairement baigner un sujet aussi fondamental que celui de la réduction des singularités. Comme cette question est néanmoins indépendante, nous en donnerons un exposé complet.

Dans un certain espace linéaire (x), soit $\mathscr{U}$ une variété algébrique irréductible, sans singularité, de dimension u, et sur celle-ci, une variété irréductible γ, sans singularité, de dimension $k \leqslant u - 2$. Sur $\mathscr{U}$, construisons un système linéaire irréductible ∞^N, $N > u$, de variétés $\mathscr{H}$ de dimension $u - 1$, passant simplement par γ et tel que :

1) u variétés $\mathscr{H}$ génériques passant par un point P donné arbi-

trairement sur $\mathscr{U}$, mais extérieur à γ, se coupent en dehors de γ en un nombre fini n de points dont un et un seul coïncide avec P, les $n - 1$ autres étant tous variables avec les $\mathscr{H}$;

2) soient A un point arbitraire de γ et α un S_{k+1} arbitraire sauf qu'il passe par le S_k tangent à γ en A et appartient au S_l tangent à $\mathscr{U}$ en A ; u variétés $\mathscr{H}$ tangentes à α en A génériques se coupent en dehors de γ en exactement $n - 1$ points tous distincts et variables lorsque les $\mathscr{H}$ varient.

Il est toujours possible de construire un tel système et l'on peut en trouver une démonstration dans [5]. De plus, sa dimension N peut être choisie aussi grande qu'on le désire. Nous avons proposé de dire qu'un tel système est *totalement simple* [6]. Nous le désignerons par $|\mathscr{H}|$.

Soit

$$\lambda_0 \mathscr{H}_0(x) + \ldots + \lambda_N \mathscr{H}_N(x) = 0$$

le système d'hypersurfaces de l'espace (x) découpant $|\mathscr{H}|$ sur $\mathscr{U}$. Les équations

$$x'_j = \mathscr{H}_j(x), \ 0 \leqslant j \leqslant N, \tag{1}$$

représentent une variété algébrique $\mathscr{U}'$ de l'espace linéaire (x'), d'ordre n, irréductible et sans singularité, image birationnelle de $\mathscr{U}$. A chaque point P de $\mathscr{U}$, extérieur à γ, correspond un et un seul point P' de $\mathscr{U}'$, et inversement. A chaque point A de γ est associé un S_{u-k-1} de $\mathscr{U}'$, en correspondance projective avec la gerbe de S_{k+1} passant par le S_k tangent à γ en A et située dans le S_u tangent à $\mathscr{U}$ en A. Le lieu de ce S_{u-k-1} lorsque A décrit γ est une variété γ', sans singularité, de dimension $u - 1$, située sur $\mathscr{U}'$. C'est la correspondance ainsi définie entre $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}'$ que nous appelons *transformation élémentaire* de *base* γ ; γ' est la *variété fondamentale* associée à γ, et ses S_{u-k-1} sont aussi dits *fondamentaux* ; deux de ces S_{u-k-1} n'ont jamais de point commun. Un point P de $\mathscr{U}$, extérieur à γ, est dit *birégulier*, de même que son image P' sur $\mathscr{U}'$. Un point A de γ est dit *point-base* ; un point A' de γ' est dit *point fondamental*.

Une première question se pose : *parmi les variétés $\mathscr{H}$, en existe-t-il pour lesquelles* tous *les points de γ sont simples?*

Observons qu'une $\mathscr{H}$ passant simplement par A a en ce point un S_{u-1} tangent, lequel contient une gerbe ∞^{u-k-2} de S_{k+1} analogues à α. La section hyperplane de $\mathscr{U}'$ que les équations (1) lui font correspondre, coupe donc le S_{u-k-1} fondamental $\mathscr{A}'$, homologue de A, suivant un S_{u-k-2}. Par contre, si $\mathscr{H}$ passe par A avec une multiplicité > 1, son image sur $\mathscr{U}'$ contient entièrement $\mathscr{A}'$. La question peut donc aussi se poser comme suit : *existe-t-il des hyperplans de l'espace* (x') *ne contenant aucun* S_{u-k-1} *fondamental de* γ' ?

Lorsque $u > 2k$, *la réponse est affirmative.* En effet, par chaque S_{u-k-1} de γ' passent ∞^{N-u+k} hyperplans de l'espace (x'). Les hyperplans de (x') contenant au moins un S_{u-k-1} de γ' sont donc en nombre ∞^{N-u+2k} si on a $u > 2k$. Dans ce cas, il existe des hyperplans de (x') ne contenant aucun de ces S_{u-k-1}, donc, coupant chacun d'eux suivant un S_{u-k-2}. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Par contre, *lorsque* $u \leqslant 2k$, *tout hyperplan de* (x') *contient au moins un* S_{u-k-1} *de* γ', puisque les hyperplans contenant au moins un tel espace sont en nombre ∞^N, comme les hyperplans de (x').

Venons-en maintenant à la question soulevée par l'objection de M. B. Segre : *existe-t-il sur* $\mathscr{U}$ *des variétés irréductibles* $\mathscr{W}$, *de dimension* $k + 1$, *passant simplement par* tout *point de* γ?

Lorsque $u > 2k$, *la réponse est affirmative.* En effet, dans ce cas, un $S_{N-u+k+1}$ générique de (x') coupe *tout* S_{u-k-1} de γ' en un et un seul point, dont le lieu est donc une variété irréductible et sans singularité, de dimension k ; de plus, il coupe $\mathscr{U}'$ suivant une variété $\mathscr{W}'$ irréductible et sans singularité, de dimension $k + 1$. Sur $\mathscr{U}$, l'image de cette $\mathscr{W}'$ est une variété $\mathscr{W}$ irréductible et de dimension $k + 1$, passant simplement par *tout* point de γ, et n'ayant d'ailleurs que des points simples. En effet, s'il n'en était pas ainsi, $\mathscr{W}'$ couperait au moins un S_{u-k-1} de γ' en plus d'un point ou aurait au moins un point multiple extérieur à γ'.

Par contre, *lorsque* $u \leqslant 2k$, *la réponse est négative*, du fait que le $S_{N-u+k+1}$ générique de (x') coupe au moins un S_{u-k-1} de γ' suivant un espace linéaire de dimension $\geqslant 1$, et qu'en conséquence, toute variété irréductible de dimension $N - u + k + 1$ de (x') coupe au moins un tel S_{u-k-1} suivant une variété de dimension $\geqslant 1$, ce qui, d'après le n° 1, entraîne l'existence, sur γ, d'au moins un point multiple de son image sur $\mathscr{U}$.

5. Revenons au cas d'espèce qui nous a occupé. Certes, l'objection de M. B. Segre est pertinente ; mais il est exagéré d'en déduire que l'introduction sur $\mathscr{U}$ d'une variété $\mathscr{W}$ de dimension $k + 1$, passant simplement par *tout* point de γ, est contradictoire. En effet, le but que nous poursuivons est la réduction des singularités d'une variété pure $\mathscr{V}$, de dimension v, appartenant à $\mathscr{U}$, et il n'est pas

du tout indispensable de lier u à v autrement que par la relation $u > v$. Or, la nature du mécanisme de réduction des singularités que nous décrivons ne fait usage de la proposition en cause que pour $k \leqslant v - 2$. Pour $v \leqslant 3$, on peut donc prendre $u = v + 1$, puisqu'alors, $u - 2k \geqslant 2 > 0$. Ainsi, il n'y avait rien de contradictoire dans le cas $v = 3$, $u = 4$ dont s'occupait la seconde communication, c'est-à-dire celle analysée par M. B. Segre.

Dans la troisième communication [7], où v est quelconque, u aurait dû être choisi $> 2(v - 2)$, ce qui était parfaitement réalisable grâce à la seconde généralisation de la notion de comportement associé qui fait l'objet de son § 1. Bien entendu, le raisonnement nouveau, faisant l'objet du n° 2 ci-dessus, est valable sans restriction, ce qui justifie le choix $u = v + 1$ qui a été fait.

Il nous reste à remercier M. B. Segre de la peine qu'il s'est donnée et à souhaiter que lui-même, et d'autres, continuent à nous faire part *aussi explicitement* de toutes les erreurs ou obscurités qu'il découvriraient dans ce difficile travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Derwidué, Sur le comportement associé et la réduction des singularités (Deuxième communication), *Bull. Soc. R. des Sci. de Liège*, n° 7-8 (1963), pp. 459-475.

[2] *Mathematical Reviews*, vol. 27, n° 6 (1964), 6181, p. 1183.

[3] L. Derwidué, Le problème de la réduction des singularités des variétés algébriques, *Math. Annalen*, Bd. 123 (1951), pp. 302-330.

[4] L. Derwidué, Décomposition des transformations birationnelles en produits de transformations élémentaires, *Math. Annalen*, Bd. 124 (1951), pp. 65-76.

[5] B. Segre, Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche, *Annali di matematica*, s. 4, t. 33 (1952), p. 10.

[6] Référence [3], p. 305.

[7] L. Derwidué, Sur le comportement associé et la réduction des singularités (Troisième communication), *Bull. Soc. R. des Sci. de Liège*, n° 9 (1963), pp. 602-622.