

REMARQUES SUR LES TERMES D'INTERACTIONS ENTRE COMPOSANTES D'UN MÉLANGE GAZEUX NON UNIFORME

par J. LEMAIRE (*)
Institut d'Astrophysique, Cointe-Sclessin

RÉSUMÉ

En se basant sur la théorie de CHAPMAN-ENSKOG, on calcule l'expression correcte des termes de collisions P_i et R_i intervenant dans les équations de mouvement et d'énergie associées à chacun des constituants (i) d'un mélange de gaz parfaits. Le vecteur P_i représente une force par cm^3 s'exerçant sur le gaz (i) ; celle-ci résulte du transfert d'impulsion spécifique par suite des collisions élastiques (i, j). Son expression ne dépend que des gradients de concentrations, du gradient de pression totale et des forces extérieures (éq. (61)). En terme des vitesses de diffusion u_i , $P_i^{[0]}$ contient une somme de plusieurs termes (éq. (63)) ; les premiers, fréquemment rencontrés en physique des plasmas, sont de la nature d'une « friction dynamique » ; le dernier, de même importance, est proportionnel au gradient de la température cinétique du mélange. Lorsque les vitesses relatives de diffusion sont nulles (à l'équilibre de diffusion) seul ce dernier terme subsiste.

ABSTRACT

Using CHAPMAN-ENSKOG's method, the accurate expressions of the collision terms P_i and R_i are calculated. These terms appear in the equations of motion and energy of each constituent (i) in a mixture of perfect gases. The vector P_i represents the specific force acting on the gas (i) due to elastic collisions (i, j). It depends on the gradients of concentrations, on the gradient of total pressure and on the external forces. It can also be expressed in terms of diffusion velocities u_i . Its expression exhibits not only the usual friction term frequently used in plasma physics, but also another one of the same magnitude. The latter is proportional to the temperature gradient of the mixture and is the only one which does not vanish when diffusion equilibrium is reached.

(*) Aspirant F.N.R.S.

Présenté par P. Ledoux, le 17 décembre 1964.

INTRODUCTION

En étudiant la séparation des charges électriques dans des modèles hydrostatiques de la couronne solaire, nous avons rencontré, dans le cas non isotherme, une difficulté qui nous a conduit à rediscuter en toute généralité le terme d'interaction entre les différentes composantes d'un mélange gazeux.

En effet, lorsqu'on écrit les équations de l'*équilibre hydrostatique* pour un mélange binaire de protons et d'électrons (*), en supposant que celui-ci est plongé dans un champ de potentiel Φ (gravifique, par exemple), et dans un champ électrique (**), \mathbf{E} résultant des divers processus de diffusion des charges électriques, on obtient

$$(1a) \quad \nabla p_i - n_i(-m_i \nabla \Phi + e\mathbf{E}) = \mathbf{P}_{ie}$$

$$(1b) \quad \nabla p_e - n_e(-m_e \nabla \Phi - e\mathbf{E}) = \mathbf{P}_{ei}$$

où p_i et p_e sont les pressions scalaires partielles des gaz de protons et d'électrons ; m_i et m_e les masses de ces particules ; n_i et n_e leurs nombres par cm^3 ; \mathbf{P}_{ie} est la force par cm^3 résultant du transfert d'impulsion du gaz (e) vers le gaz (i).

Ce terme intervient fréquemment en physique des plasmas et son expression est souvent donnée [1, 2, 3] sous la forme

$$(2) \quad \mathbf{P}_{ie} = -\mathbf{P}_{ei} = n_e m_e \nu_1 (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)$$

« Autrement dit, l'échange de quantité de mouvement entre électrons et ions est proportionnel à la différence de leur vitesse de diffusion \mathbf{u}_j » (DELGROIX [2] p. 263). ν_1 a les dimensions d'une fréquence de collisions.

Dans le cas où le modèle est aussi en *équilibre de diffusion* (***) $\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e$ est nul, et par conséquent, d'après (2), $\mathbf{P}_{ie} = 0$. Les équations (1a) et (1b) pourraient alors s'écrire :

(*) Nous avons initialement étudié le cas d'un plasma d'hydrogène. Remarquons toutefois que la difficulté à laquelle on vient de faire allusion se retrouve lorsqu'on considère un mélange quelconque de gaz ionisés ou non.

(**) Le champ électrique \mathbf{E} est en quelque sorte un « champ diélectrique » induit dans le milieu par les forces extérieures (gravifiques) les gradients de température etc.

(***) On peut montrer qu'au sein de la couronne solaire l'état d'équilibre de diffusion s'établit en moins de 20 minutes.

$$(3a) \quad \nabla \ln p + \frac{1}{1 + n_{12}} \nabla \ln n_{12} = - \frac{1}{\mathcal{R}T} \nabla \Phi + \frac{e \mathbf{E}_D}{kT}$$

$$(3b) \quad \nabla \ln p - \frac{n_{12}}{1 + n_{12}} \nabla \ln n_{12} = - \frac{M_{21}}{\mathcal{R}T} \nabla \Phi - \frac{e \mathbf{E}_D}{kT}$$

De l'équation exprimant l'équilibre de diffusion (cfr. CHAPMAN et COWLING [4])

$$(4) \quad \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e = 0$$

on tire la valeur du champ électrique de diffusion \mathbf{E}_D

$$(5) \quad \frac{e \mathbf{E}_D}{kT} = \frac{n_{12} + M_{21}}{(1 + n_{12})(1 + M_{21})} \left[\frac{(1 + n_{12})^2}{n_{12}} k_T \nabla \ln T + \nabla \ln n_{12} \right] \\ - \frac{1 - M_{21}}{1 + M_{21}} \nabla \ln p$$

où l'on a défini

$$(6a) \quad M_{21} = \frac{m_e}{m_i}; \quad n_{12} = \frac{n_i}{n_e}$$

$$(6b) \quad \mathcal{R} = \frac{k}{m_i}; \quad \bar{\mu} = \frac{n_i m_i + n_e m_e}{(n_i + n_e) m_i};$$

k_T est le facteur de diffusion thermique.

Comme le mélange est un gaz parfait, les pressions p , p_i , p_e sont données par

$$(7) \quad p = \frac{\mathcal{R} \rho}{\bar{\mu}} T; \quad p_i = p \frac{n_i}{n}; \quad p_e = p \frac{n_e}{n}$$

En remplaçant alors successivement la valeur de \mathbf{E}_D donnée par (5) dans (3a) et (3b), on s'aperçoit qu'on obtient deux équations incompatibles à moins de supposer que $\nabla T = 0$, c'est-à-dire que le modèle est isotherme. En effet, on trouve de cette façon,

$$(8a) \quad 2 \nabla \ln p + \frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}} \nabla \ln n_{12} + \frac{1 + M_{21}}{\mathcal{R}T} \nabla \Phi = \\ = \frac{(1 + n_{12})(n_{12} + M_{21})}{n_{12}} k_T \nabla \ln T$$

$$\begin{aligned}
 (8b) \quad 2 \nabla \ln p + \frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}} \nabla \ln n_{12} + \frac{1 + M_{21}}{\mathcal{R}T} \nabla \Phi = \\
 = - M_{12} \cdot \frac{(1 + n_{12})(n_{12} + M_{21})}{n_{12}} k_T \nabla \ln T
 \end{aligned}$$

Cette difficulté nous a amené à examiner la validité de la relation (2) et à calculer effectivement les termes de collisions P_i et R_i en utilisant la théorie de CHAPMAN-ENSKOG. La nouvelle expression très générale de P_i que nous déduisons dans la suite, est telle $P_{ie} = -P_{ei}$; elle contient en plus du terme de « friction dynamique » (éq. (2)) un terme proportionnel au gradient de la température.

Avec ces valeurs de P_{ie} et P_{ei} , la substitution de (5) dans (3a) et (3b) conduit alors à une seule et même équation qui n'est autre que l'équation hydrostatique globale relative au mélange des deux gaz.

Nous commencerons par un rapide résumé de la méthode de CHAPMAN[5]-ENSKOG[6]. Celle-ci a été exposée en grand détail par CHAPMAN et COWLING [4] dans le cas d'un gaz simple et d'un mélange binaire. CURTISS et HIRSCHFELDER [7] ont généralisé la méthode au cas d'un mélange de plus de deux gaz.

Nous calculons finalement les termes de collision en utilisant les notations de HIRSCHFELDER, CURTISS et BIRD [8].

ÉQUATION DE BOLTZMANN

Désignons par $f_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}_i, t)$ [$i = 1, 2, \dots, \nu$] les fonctions de distribution des vitesses associées aux ν constituants chimiques en mélange dans un gaz. Celles-ci doivent chacune vérifier une équation intégral-différentielle de BOLTZMANN.

$$(9) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla f_i + \frac{1}{m_i} \mathbf{X}_i \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} f_i = \sum_{j=1}^{\nu} J(f_i, f_j)$$

où les vitesses des particules \mathbf{v}_i sont évalués par rapport à un système d'axes attachés au laboratoire. La vitesse moyenne de masse du mélange est alors définie par

$$(10) \quad \rho \mathbf{v}_0 = \sum_{i=1}^{\nu} n_i m_i \bar{\mathbf{v}}_i ; \quad \rho = \sum_{i=1}^{\nu} n_i m_i$$

(m_i : masse des particules d'espèce i ; n_i , leur nombre par cm^3).

On définit aussi le vecteur V_i représentant la vitesse des particules mesurée par rapport à un système d'axes en mouvement avec la vitesse ν_0 .

On a donc

$$(11) \quad V_i = \nu_i - \nu_0; \quad \sum_{i=1}^{\nu} n_i m_i \vec{V}_i = 0.$$

Le vecteur X_i représente la force extérieure s'exerçant sur une particule d'espèce i . Le second membre de l'équation (9) est une somme de ν intégrales de collisions entre particules i et j ; ces dernières ont pour expression

$$(12) \quad J(f_i, f_j) = 2\pi \int \int (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\nu_j$$

La notation f'_i est, comme d'habitude, utilisée pour désigner la fonction $f_i(\nu'_i \dots)$ où ν'_i est la vitesse de la particule après une collision (i, j) dont le paramètre d'impact est b , et la vitesse relative avant la collision est g_{ij} .

$$(13) \quad g_{ij} = | \nu_i - \nu_j |$$

ÉQUATIONS MACROSCOPIQUES

Définissons la moyenne d'une grandeur microscopique par

$$(14) \quad \bar{\Psi} = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{n_j} \int \Psi f_j d\nu_j$$

Les nombres de particules par cm^3 n_i et n , les vitesses de diffusion u_i , les pressions partielles \mathbf{p}_i et totale \mathbf{p} , la température T , les flux d'énergie \mathbf{q}_i et \mathbf{q} , etc., sont respectivement obtenus comme cas particulier de (14) en prenant $\Psi \equiv \delta_{ij}$, ($n_i = \bar{\delta}_{ij}$); $\Psi \equiv 1$, ($n = \bar{1}$); $\Psi \equiv V_i \delta_{ij}$, ($u_i = \overline{V_i \delta_{ij}}$); $\Psi \equiv n_i m_i V_i V_i \delta_{ij}$, ($\mathbf{p}_i = \overline{n_i m_i V_i V_i \delta_{ij}}$);

$$\Psi \equiv n_j m_j V_j V_j, \quad (\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{p}_i); \quad \Psi \equiv \frac{1}{3k} m_j V_j^2, \quad \left(\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2} \overline{m_j V_j^2}\right);$$

$$\Psi \equiv \frac{1}{2} m_i V_i^2 V_i \delta_{ij}, \quad (\mathbf{q}_i = \frac{1}{2} \overline{m_i V_i^2 V_i \delta_{ij}}); \quad \Psi \equiv \frac{1}{2} m_j V_j^2 V_j, \quad (\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{q}_i) \dots$$

Ceci étant posé, nous pouvons écrire les équations macroscopiques de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie pour chacun des gaz en multipliant les deux membres de (9) respectivement par m_i , $m_i V_i$, $\frac{1}{2} m_i V_i^2$ et en intégrant ensuite ceux-ci sur l'ensemble des vitesses v_i .

On obtient [4,8] ainsi les équations suivantes (*) :

$$(15) \quad \frac{Dn_i}{Dt} + n_i \nabla \cdot v_0 + \nabla \cdot n_i u_i = 0$$

$$(16) \quad \frac{D}{Dt} (\rho_i u_i) + \rho_i u_i \nabla \cdot v_0 + \nabla \cdot p_i - \rho_i \left(\frac{X_i}{m_i} - \frac{D}{Dt} v_0 \right) + \rho_i u_i \cdot \nabla v_0 = P_i$$

$$(17) \quad \frac{D}{Dt} \left(\frac{3}{2} n_i k T \right) + \frac{3}{2} n_i k T \nabla \cdot v_0 + \nabla \cdot q_i - \rho_i u_i \cdot \left(\frac{X_i}{m_i} - \frac{D}{Dt} v_0 \right) + p_i : \nabla v_0 = R_i$$

où D/Dt est l'opérateur de dérivation $(\partial/\partial t + v_0 \cdot \nabla)$. Le vecteur P_i dont les composantes sont définies par

$$(18) \quad (P_i)_\alpha = \sum_{i=1}^v \int m_i (V_i)_\alpha J(f_i, f_j) dv_i; \quad (\alpha = x, y, z)$$

est de la nature d'une force par unité de volume et représente la variation de l'impulsion spécifique du gaz d'espèce i par suite des collisions. La conservation de la quantité de mouvement au cours d'un choc binaire (i, j) implique que

$$(19) \quad \sum_{i=1}^v P_i = 0$$

(*) Le produit scalaire de deux vecteurs est noté $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ et vaut $\sum_{\alpha}^3 a_{\alpha} b_{\alpha}$ ($\alpha = x, y, z$); la notation \mathbf{ab} est celle d'un tenseur de composantes $a_{\alpha} b_{\beta}$ (α et $\beta = x, y, z$); le double produit de deux tenseurs \mathbf{t} et \mathbf{t}' est égale à $\sum_{\alpha} \sum_{\beta} t_{\alpha\beta} t'_{\beta\alpha}$ et est noté par $\mathbf{t}:\mathbf{t}'$.

La grandeur scalaire R_i représente la variation de la densité d'énergie cinétique du gaz i par suite des collisions.

$$(20) \quad R_i = \sum_{i=1}^{\nu} \int \frac{1}{2} m_i V_i^2 J(f_i, f_j) d\nu_i$$

La conservation de l'énergie au cours d'un choc élastique permet d'écrire que

$$(21) \quad \sum_{i=1}^{\nu} R_i = 0$$

Si l'on ajoute membre à membre les ν équations (15) $\times m_i$, (16) et (17) on obtient en tenant compte de (11), (19) et (21)

$$(22) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0$$

$$(23) \quad \rho \frac{D\mathbf{v}_0}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{p} - \sum_{i=1}^{\nu} n_i \mathbf{X}_i = 0$$

$$(24) \quad \frac{3}{2} nk \frac{DT}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{3}{2} kT \nabla \cdot \left(\sum_{i=1}^{\nu} n_i \mathbf{u}_i \right) - \sum_{i=1}^{\nu} n_i \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{u}_i + \\ + \mathbf{p} : \nabla \mathbf{v}_0 = 0$$

La première de ces équations hydrodynamiques exprime la conservation de la masse ; la deuxième est l'équation de mouvement et exprime la conservation de l'impulsion spécifique ; la dernière enfin est l'équation de transfert d'énergie et n'est qu'une forme particulière du premier principe de la thermodynamique.

RAPPEL DE LA MÉTHODE DE CHAPMAN-ENSKOG

La méthode utilisée pour résoudre l'équation de BOLTZMANN (9) est une méthode d'approximations successives. On admet que les fonctions de distribution des vitesses $f_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}, t)$ peuvent être approchées d'aussi près que l'on veut par une suite absolument con-

vergente dont le terme général est $\sum_{r=0}^m f_i^{[r]}$. La limite de cette suite pour $m \rightarrow \infty$ s'identifie avec f_i

$$(25) \quad f_i = \sum_{r=0}^{\infty} f_i^{[r]}$$

Cette série est choisie de telle façon que le terme $f_i^{[r]}$ soit de l'ordre ε^n vis-à-vis d'un paramètre ε , tel que $1/\varepsilon$ caractérise la fréquence de collision. Lorsque la fréquence de collision est élevée, les termes d'ordre $r \geq 2$ peuvent être négligés. On identifie alors la fonction de distribution avec le deuxième terme de la suite, c'est-à-dire avec $f_i^{[0]} + f_i^{[1]}$.

Remarquons que le second membre de l'équation contient des termes de l'ordre de ε^{-1} puisqu'il est directement proportionnel à la fréquence de collision.

En substituant (25) dans l'équation intégrro-différentielle (9) et en égalant les termes du même ordre en ε^r (pour $r = -1, 0, 1, 2, \dots$) on est conduit au système d'équations intégrales suivant :

$$(26) \quad 0 = \sum_{j=1}^v J(f_i^{[0]}, f_j^{[0]})$$

$$(27) \quad \frac{\partial f_i^{[0]}}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla f_i^{[0]} + \frac{1}{m_i} \mathbf{X}_i \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} f_i^{[0]} = \sum_{j=1}^v [J(f_i^{[0]}, f_j^{[1]}) + J(f_i^{[1]}, f_j^{[0]})]$$

$$(28) \quad \frac{\partial f_i^{[r]}}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla f_i^{[r]} + \frac{1}{m_i} \mathbf{X}_i \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} f_i^{[r]} = \sum_{j=1}^v \sum_{k=0}^{r+1} J(f_i^{[k]}, f_j^{[r+1-k]})$$

On a montré [1,2,3] que les solutions les plus générales de l'équation (26) sont du type

$$(29) \quad f_i^{[0]} = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp. \left(- \frac{m_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0)^2}{2kT} \right)$$

où les quantités n_i , T et \mathbf{v}_0 ne dépendent pas des vitesses \mathbf{v}_i mais

sont des fonctions quelconques de la position \mathbf{r} et du temps t .
Remarquons que d'après (29)

$$(30) \quad n_i(\mathbf{r}, t) = \int f_i^{[0]}(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v}_i$$

$$(31) \quad \rho \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{\nu} \int f_i^{[0]}(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}, t) \cdot m_i \mathbf{v}_i d\mathbf{v}_i$$

$$(32) \quad \frac{3}{2} nkT(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{\nu} \int f_i^{[0]}(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}, t) \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0)^2 d\mathbf{v}_i$$

Si nous voulons que ces quantités représentent respectivement les nombres de particules i par cm^3 , la vitesse moyenne de masse et la température cinétique du gaz, il faut évidemment que les $f_i^{[r]}$ vérifient les conditions intégrales suivantes

$$(33) \quad \int f_i^{[r]} d\mathbf{v}_i = 0; \quad r \geq 1$$

$$(34) \quad \sum_{i=1}^{\nu} m_i \int f_i^{[r]} \mathbf{v}_i d\mathbf{v}_i = 0; \quad r \geq 1$$

$$(35) \quad \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{2} m_i \int f_i^{[r]} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0)^2 d\mathbf{v}_i = 0; \quad r \geq 1$$

ENSKOG introduit alors des fonctions perturbatrices $\Phi_i^{[r]}(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}, t)$ afin de mettre les $f_i^{[r]}$ sous la forme

$$(36) \quad f_i^{[r]}(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}, t) = f_i^{[0]}(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}, t) \Phi_i^{[r]}(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}, t)$$

Le problème consiste maintenant à rechercher la forme de ces fonctions perturbatrices qui devront satisfaire d'après (33), (34) et (35) aux conditions

$$(37) \quad \int f_i^{[0]} \Phi_i^{[r]} d\mathbf{v}_i = 0; \quad r \geq 1$$

$$(38) \quad \sum_{i=1}^{\nu} m_i \int f_i^{[0]} \Phi_i^{[r]} \mathbf{v}_i d\mathbf{v}_i = 0; \quad r \geq 1$$

$$(39) \quad \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{2} m_i \int f_i^{[0]} \Phi_i^{[r]} V_i d\mathbf{v}_i = 0 ; \quad r \geq 1$$

Les valeurs moyennes d'une grandeur microscopique $\Psi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k \dots)$ (cf. déf. (14)) sont chacune la limite d'une suite convergente

$$(40) \quad \left\{ \sum_{r=0}^m \tilde{\Psi}^{[r]} \right\} \quad \tilde{\Psi} = \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\Psi}^{[r]}$$

où les termes $\tilde{\Psi}^{[r]}$ de la série (40) sont définis à l'aide des fonctions $f_j^{[r]}$

$$(41) \quad \tilde{\Psi}^{[r]} = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{n_j} \int f_j^{[0]} \Phi_j^{[r]} \Psi d\mathbf{v}_j$$

En particulier, on trouve que $n_i^{[r]} = \delta_{0r} n_i (*)$; $n^{[r]} = \delta_{0r} n$;
 $\mathbf{u}_i^{[0]} = 0$; $\mathbf{v}_0^{[r]} = \delta_{0r} \mathbf{v}_0$; $T^{[r]} = \delta_{0r} T$; $\mathbf{p}_i^{[0]} = n_i k T \mathbf{U} (**)$ = $p_i \mathbf{U}$;
 $\mathbf{p}^{[0]} = nkT \mathbf{U} = p \mathbf{U}$; $\mathbf{q}_i^{[0]} = 0$; $\mathbf{q}^{[0]} = 0$; ...

Récrivons les éq. hydrodynamiques (22), (23), (24) en tenant compte de la définition (41) et, en regroupant (***) les termes de même ordre en ε ,

$$(42) \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} = [-\nabla \cdot n_i \mathbf{v}_0] + \sum_{r=1}^{\infty} [-\nabla \cdot n_i \mathbf{u}_i^{[r]}]$$

$$(43) \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} = [-\rho \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^{\nu} n_i \mathbf{X}_i - \nabla \cdot \mathbf{p}^{[0]}] + \sum_{r=1}^{\infty} [-\nabla \cdot \mathbf{p}^{[r]}]$$

(*) δ_{0r} est le symbole de KRONECKER.

(**) \mathbf{U} est le tenseur unité de composantes $\delta_{\alpha\beta}$

(***) Dans les expressions (42), (43), (44) on a isolé au premier membre les dérivées partielles par rapport au temps t .

$$(44) \quad \frac{3}{2} nk \frac{\partial T}{\partial t} = \left[-\frac{3}{2} nk \mathbf{v}_0 \cdot \nabla T - nkT \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \right] + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{3}{2} kT \nabla \cdot \sum_{i=1}^{\nu} n_i \mathbf{u}_i^{[r]} + \sum_{i=1}^{\nu} n_i \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{u}_i^{[r]} - \nabla \cdot \mathbf{q}^{[r]} - \mathbf{p}^{[r]} : \nabla \mathbf{v}_0 \right].$$

Ces équations permettront d'exprimer à l'ordre d'approximation désiré les dérivées temporelles $\partial f_i^{[r]}/\partial t$, c'est-à-dire

$\left(f_i^{[0]} \cdot \frac{\partial \Phi_i^{[r]}}{\partial t} + \Phi_i^{[r]} \cdot \frac{\partial f_i^{[0]}}{\partial t} \right)$ intervenant dans les premiers membres des équations (27), (28), etc. De cette façon il n'apparaîtra dans ces mêmes équations que des dérivées spatiales de $n_i(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t)$ et $T(\mathbf{r}, t)$.

C'est ainsi que $\partial f_i^{[0]}/\partial t$, qui peut encore s'écrire d'après (29)

$$(45) \quad f_i^{[0]} \frac{\partial \ln f_i^{[0]}}{\partial t} = f_i^{[0]} \left[\frac{\partial \ln n_i}{\partial t} + \left(\frac{m_i V_i^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \frac{\partial \ln T}{\partial t} + \frac{m_i V_i}{2kT} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_0 \right]$$

pourra finalement, en utilisant les relations (42), (43) et (44) à l'ordre zéro en ε , s'exprimer en terme des ∇n_i , ∇p , $\nabla \mathbf{v}_0$, ∇T et \mathbf{X}_i . Il en est de même pour $\nabla f_i^{[0]}$ et $\nabla_{\mathbf{v}_i} f_i^{[0]}$.

En regroupant tous les termes, l'équation (27) devient

$$(46) \quad f_i^{[0]} \left[\frac{n}{n_i} V_i \cdot \mathbf{d}_i + \frac{m_i}{kT} [V_i V_i - \frac{1}{3} V_i^2 \mathbf{U}] : \nabla \mathbf{v}_0 - \left(\frac{5}{2} - \frac{m_i V_i^2}{2kT} \right) V_i \cdot \nabla \ln T \right] = 2\pi \sum_{j=1}^{\nu} \iint f_j^{[0]} f_i^{[0]} (\Phi_i^{[1]} + \Phi_j^{[1]} - \Phi_i^{[1]} - \Phi_j^{[1]}) g_{ij} b db dv_j$$

où l'on a posé

$$(47) \quad \mathbf{d}_i = \nabla \left(\frac{n_i}{n} \right) + \left(\frac{n_i}{n} - \frac{n_i m_i}{\rho} \right) \nabla \ln p - \frac{n_i m_i}{p \rho} \left(\frac{\rho}{m_i} \mathbf{X}_i - \sum_{j=1}^{\nu} n_j \mathbf{X}_j \right)$$

L'équation (46) est une équation intégrale dont la solution la plus générale $\Phi_i^{[1]}$ a la forme suivante

$$(48) \quad \Phi_i^{[1]} = -\mathcal{A}_i(V_i)V_i \cdot \nabla \ln T - \mathcal{B}_i(V_i) \left[V_i V_i - \frac{1}{3} V_i^2 \mathbf{U} \right] : \nabla \mathbf{v}_0 \\ + n \sum_{j \neq i}^{\nu} \mathcal{C}_i^{(j)}(V_i) V_i \cdot \mathbf{d}_j$$

(*) où les coefficients $\mathcal{A}_i(V_i)$, $\mathcal{B}_i(V_i)$ et $\mathcal{C}_i^{(j)}(V_i)$ sont uniquement des fonctions du module de la vitesse V_i . Ceux-ci seront déterminés par des équations (46a), (46b) et (46c) obtenues respectivement en identifiant les coefficients de \mathbf{d}_j , $\nabla \ln T$ et $\nabla \mathbf{v}_0$ dans l'équation (46) où les $\Phi_i^{[1]}$ auront été remplacés par (48).

Remarquons encore que si les $\Phi_i^{[1]}$ ont la forme (48) les conditions (37), (38) et (39) sont automatiquement satisfaites puisque l'intégration sur tout l'espace des vitesses \mathbf{v}_i d'une fonction impaire de $(V_i)_x$, $(V_i)_y$ ou $(V_i)_z$ donne identiquement zéro.

Pour résoudre le système (46a), (46b), (46c) obtenu comme il vient d'être dit, il existe deux méthodes équivalentes utilisant toutes les deux le développement des \mathcal{A}_i , \mathcal{B}_i et $\mathcal{C}_i^{(j)}$ en série de *polynômes de Sonine*. La première et la plus ancienne de ces méthodes est celle exposée par CHAPMAN et COWLING à la référence (4) dans le cas particulier d'un mélange binaire de gaz parfaits. La seconde due à CURTISS et HIRSCHFELDER est basée sur le calcul variationnel (voir référence (8), p. 472). Le but de ces méthodes est l'évaluation des coefficients de diffusion, D_{ij} , D_i^T , de viscosité, μ , et de conductibilité thermique, λ .

Dans le paragraphe qui suit nous calculons à l'aide des éléments ci-dessus les termes de collision (14) et (16).

(*) Dans la sommation sur j intervenant dans (48) on ne fait pas figurer le terme $\mathcal{C}_i^{(i)} V_i \cdot \mathbf{d}_i$; en effet les ν vecteurs \mathbf{d}_j sont linéairement dépendants

$$\sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{d}_i = 0$$

et dès lors toute combinaison linéaire des ν vecteurs \mathbf{d}_j peut se réduire à une combinaison de $\nu - 1$ de ces vecteurs seulement.

ÉVALUATION DES TERMES DE COLLISION P_i ET R_i

En utilisant les séries (25) et (40) il est possible de réécrire les équations (15), (16) et (17) en regroupant les termes du même ordre par rapport à ε . On obtient de cette façon des équations analogues à (42), (43) et (44).

$$(49) \quad \left[\frac{Dn_i}{Dt} + n_i \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \right] + \sum_{r=1}^{\infty} [\nabla \cdot n_i \mathbf{u}_i^{[r]}] = 0$$

$$(50) \quad [-P_i^{[-1]}] + [\nabla p_i - \rho_i \left(\frac{X_i}{m_i} - \frac{D\mathbf{v}_0}{Dt} \right) - P_i^{[0]}] + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{D}{Dt} (\rho_i \mathbf{u}_i^{[r]}) + \nabla \cdot \mathbf{p}_i^{[r]} + \rho_i \mathbf{u}_i^{[r]} \nabla \cdot \mathbf{v}_0 + \rho_i \mathbf{u}_i^{[r]} \cdot \nabla \mathbf{v}_0 - P_i^{[r]} \right] = 0$$

$$(51) \quad [-R_i^{[-1]}] + \left[\frac{D}{Dt} \left(\frac{3}{2} n_i kT \right) + \frac{3}{2} n_i kT \nabla \cdot \mathbf{v}_0 + p_i \nabla \cdot \mathbf{v}_0 - R_i^{[0]} \right] + \sum_{r=1}^{\infty} [\nabla \cdot \mathbf{q}_i^{[r]} - \rho_i \mathbf{u}_i^{[r]} \cdot \left(\frac{X_i}{m_i} - \frac{D\mathbf{v}_0}{Dt} \right) + \mathbf{p}_i^{[r]} : \nabla \mathbf{v}_0 - R_i^{[r]}] = 0$$

Les $P_i^{[r]}$ et $R_i^{[r]}$ sont définis par

$$(52) \quad P_i^{[r]} = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{r+1} \int m_i V_i J(f_i^{[k]}, f_j^{[r+1-k]}) d\mathbf{v}_i$$

$$(53) \quad R_i^{[r]} = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{r+1} \int \frac{1}{2} m_i V_i^2 J(f_i^{[k]}, f_j^{[r+1-k]}) d\mathbf{v}_i$$

Les termes $P_i^{[-1]}$ et $R_i^{[-1]}$ de l'ordre de ε^{-1} (c'est-à-dire directement proportionnel à la fréquence de collision) sont, en vertu de (26), identiquement nuls puisqu'ils ont pour expression

$$(54) \quad P_i^{[-1]} = m_i \int V_i \sum_{j=1}^{\nu} J(f_i^{[0]}, f_j^{[0]}) d\mathbf{v}_i \equiv 0$$

$$(55) \quad R_i^{[-1]} = \frac{1}{2} m_i \int V_i^2 \sum_{j=1}^{\nu} J(f_i^{[0]}, f_j^{[0]}) d\mathbf{v}_i \equiv 0$$

Par contre, il n'en est pas de même pour $P_i^{[0]}$

$$(56) \quad P_i^{[0]} = m_i \int V_i \sum_{j=1}^{\nu} [J(f_i^{[0]}, f_j^{[1]}) + J(f_i^{[1]}, f_j^{[0]})] d\nu_i$$

qui, en vertu de (27) ou (46), est égal à

$$(57) \quad m_i \int V_i f_i^{[0]} \left[\frac{n}{n_i} V_i \cdot \mathbf{d}_i + \frac{m_i}{kT} [V_i V_i - \frac{1}{3} V_i^2 \mathbf{U}] : \nabla \nu_0 - \left(\frac{5}{2} - \frac{m_i V_i^2}{2kT} \right) V_i \cdot \nabla \ln T \right] d\nu_i$$

Le second terme de l'intégrand est une fonction impaire des $(V_i)_x$, $(V_i)_y$ et $(V_i)_z$; il donnera dès lors une contribution nulle. Le dernier terme (*)

$$(58) \quad -\frac{1}{3} \nabla \ln T \int f_i^{[0]} m_i V_i^2 \left(\frac{5}{2} - \frac{m_i V_i^2}{2kT} \right) d\nu_i$$

s'annule aussi parce que

$$(59) \quad \frac{5}{2} \int f_i^{[0]} V_i^2 d\nu_i \equiv \frac{m_i}{2kT} \int f_i^{[0]} V_i^4 d\nu_i$$

Il reste finalement (*).

$$(60) \quad P_i^{[0]} = \frac{1}{3} n \frac{m_i}{n_i} \mathbf{d}_i \int f_i^{[0]} V_i^2 d\nu_i$$

$$(61) \quad \boxed{P_i^{[0]} = nkT \mathbf{d}_i}$$

On peut aussi mettre (61) sous une forme faisant apparaître les vitesses de diffusion \mathbf{u}_j et le gradient de la température. En effet de l'équation de diffusion (réf. (8) : formule 7-4. 48)

$$(62) \quad \sum_{j=1}^{\nu} \frac{n_i n_j}{n^2 [\mathcal{D}_{ij}]_1} [\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i] = \mathbf{d}_i - \nabla \ln T \sum_{j=1}^{\nu} \frac{n_i n_j}{n^2 [\mathcal{D}_{ij}]_1} \left(\frac{D_j^T}{n_j m_j} - \frac{D_i^T}{n_i m_i} \right)$$

(*) Remarquons que si \mathbf{a} est un vecteur indépendant de V_i et $F(V_i)$ une fonction du module de la vitesse V_i on a toujours

$$\int F(V_i) V_i (V_i \cdot \mathbf{a}) d\nu_i = \frac{1}{3} \mathbf{a} \int F(V_i) V_i \cdot V_i d\nu_i$$

(*) on peut tirer une expression de \mathbf{d}_i et la remplacer dans (61) :

$$(63) \mathbf{P}_i^{[0]} = \frac{kT}{n} \sum_{j=1}^v \frac{n_i n_j}{[\mathcal{D}_{ij}]_1} [\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i] + \frac{k}{n} \nabla T \sum_{j=1}^v \frac{n_i n_j}{[\mathcal{D}_{ij}]_1} \left(\frac{D_j^T}{n_j m_j} - \frac{D_i^T}{n_i m_i} \right)$$

où $[\mathcal{D}_{ij}]_1$ est le coefficient de diffusion ordinaire (à l'approximation 1) introduit par CHAPMAN et COWLING [4] dans le cas particulier d'un mélange binaire (i, j) ; D_j^T est le coefficient de diffusion thermique du gaz j (**). La formule (63) fait apparaître non seulement une force de « friction dynamique » dépendant des vitesses relatives de diffusion $\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j$ mais également une force proportionnelle au gradient de la température, qui est la seule qui subsiste lorsque l'équilibre de diffusion est réalisé.

Dans un mélange binaire (1, 2), le vecteur \mathbf{d}_1 (éq. 47) est égal à $(-\mathbf{d}_2)$ et s'identifie avec \mathbf{d}_{12} défini par CHAPMAN et COWLING dans la référence [4] (formule 8.3-7)

$$(64) \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_{12} = \nabla \left(\frac{n_1}{n} \right) + \frac{n_1 n_2 (m_2 - m_1)}{n \rho} \nabla \ln p - \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} \left(\frac{X_1}{m_1} - \frac{X_2}{m_2} \right)$$

L'équation de diffusion (62) prend alors généralement la forme (éq. [4] 8.41-7).

$$(65) \quad \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = - \frac{n^2}{n_1 n_2} [\mathcal{D}_{12} \mathbf{d}_{12} + \mathcal{D}_T \nabla \ln T]$$

où \mathcal{D}_{12} est le coefficient de diffusion binaire dont il a déjà été question ci-dessus. Tandis que \mathcal{D}_T est le coefficient de diffusion thermique binaire ; celui-ci est relié aux coefficients D_1^T et D_2^T par la relation

$$(66) \quad \mathcal{D}_T = \frac{\rho_2 D_1^T - \rho_1 D_2^T}{m_1 m_2 n^2}$$

(*) Les vitesses de diffusion \mathbf{u}_j des formules (62), (63) ... sont en réalité celles calculées à l'aide des $f_j^{[1]}$, c'est-à-dire : $\mathbf{u}_j^{[1]}$. Rappelons que les $\mathbf{u}_j^{[0]}$ sont nuls. Dans la suite nous conservons les notations \mathbf{u}_j : ceci revient à identifier \mathbf{u}_j avec $\{\mathbf{u}_j^{[0]} + \mathbf{u}_j^{[1]}\}$ qui est le second terme de la suite infinie qui définit la vraie valeur de \mathbf{u}_j .

(**) Le coefficient D_j^T appelé dans la littérature anglo-saxonne « Multi-component thermal diffusion coefficient of the constituent j » ne s'identifie pas avec le coefficient de diffusion thermique \mathcal{D}_T introduit par CHAPMAN et COWLING [4] dans le cas d'un mélange binaire.

La force par cm^3 , $P_1^{[0]}$, résultant du transfert de quantité de mouvement par suite des collisions élastiques que subissent les particules I , est donc égale à

$$(67) \quad P_1^{[0]} = \frac{kT}{n} \frac{n_1 n_2}{\mathcal{D}_{12}} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) - nk k_T \nabla T$$

où k_T est le facteur de diffusion thermique pour un mélange binaire

$$(68) \quad k_T = \frac{\mathcal{D}_T}{\mathcal{D}_{12}}$$

L'expression (67) est donc celle qui doit remplacer la formule (2) généralement utilisée dans l'étude des plasmas binaires. L'expression (2) serait correcte à condition de spécifier que $\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$ ne représente que la partie mécanique de la vitesse relative de diffusion, c'est-à-dire qu'elle s'identifie avec le premier terme du second

$$\text{membre de (65) à savoir : } - \frac{n^2}{n_i n_e} \mathcal{D}_{ei} \mathbf{d}_{ei}$$

Dans le cas d'un mélange binaire on peut encore exprimer la vitesse relative de diffusion en termes du courant électrique \mathbf{i} , en effet en vertu de la condition de neutralité électrique

$$n_1 Z_1 + n_2 Z_2 = 0,$$

on a

$$(69) \quad \mathbf{i} = n_2 Z_2 e (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)$$

et (67) devient

$$(70) \quad P_1^{[0]} = \frac{kT}{\mathcal{D}_{12}} \frac{1}{(Z_1 - Z_2)e} \mathbf{i} - nk k_T \nabla T$$

Remarquons toutefois que dans le cas d'un plasma de plus de deux constituants, le terme de « friction dynamique » de (63) n'est pas directement proportionnel au courant électrique \mathbf{i} ,

$$(71) \quad \mathbf{i} = \sum_{j=1}^{\nu} n_j Z_j e \mathbf{u}_j$$

Terminons en évaluant $R_1^{[0]}$. D'après (53) et (46), on a

$$(72) \quad R_i^{[0]} = \frac{1}{2} m_i \int V_i^2 f_i^{[0]} \left[\frac{n}{n_i} \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{V}_i + \frac{m_i}{kT} \left(V_i V_i - \frac{1}{3} V_i^2 \mathbf{U} \right) : \nabla \mathbf{v}_0 \right. \\ \left. - \left(\frac{5}{2} - \frac{m_i V_i^2}{2kT} \right) V_i \cdot \nabla \ln T \right] d\mathbf{v}_i$$

En tenant compte de la parité des fonctions sous le signe intégral on voit que $R_i^{[0]}$ est, comme $R_i^{[-1]}$, identiquement nul.

CONCLUSION

Les termes de collision P_i et R_i qui apparaissent dans les équations de mouvement et d'énergie d'un gaz i , faisant partie d'un mélange non-uniforme de gaz parfaits, ont été calculés à l'ordre zéro par la théorie de CHAPMAN-ENSKOG.

La substitution des $P_i^{[-1]}$, $P_i^{[0]}$ (éq. (61)), $R_i^{[-1]}$ et $R_i^{[0]}$ dans les équations (50), (51) écrites à l'ordre d'approximation zéro ($r = 0$) donne, si l'on tient compte de (49), les équations hydrodynamiques globales (42), (43) et (44) au même ordre d'approximation.

Il s'avère que les collisions élastiques sont à l'origine d'une force interne P_i ne dépendant que des gradients de concentrations n_i/n , du gradient de pression totale p et des forces extérieures X_i ; (cfr. éq. (61)). L'expression de P_i en termes des vitesses de diffusion u_i , fait apparaître, en plus des termes de « friction dynamique » généralement utilisés en physique des plasmas, un terme de même importance proportionnel au gradient de la température. Ce dernier est de signe opposé et contrebalance exactement celui qui apparaît dans l'expression des vitesses relatives de diffusion $u_i - u_j$.

A l'ordre zéro, R_i la variation de la densité d'énergie cinétique du gaz par suite des collisions élastiques est nulle.

Je tiens à remercier M. le Professeur P. LEDOUX et M. R. SIMON pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail ainsi que pour l'aide et l'encouragement qu'ils m'ont apportés.

RÉFÉRENCES

- [1] SPITZER L., *Physics of Fully Ionized Gases*, Intersc. Publishers Inc. (New York) (1956).
- [2] DELCROIX J. L., *Physique des plasmas, I*, Dunod, Paris (1963).
- [3] BRINCKMAN H. C., Intern. Summer course in Plasma Physics 1960, Report Risö, n° 18, p. 45.
- [4] CHAPMAN S. et COWLING T. G., *The Mathematical Theory of non-uniform Gases*, Cambridge Univ. Press (1939).

- [⁵] CHAPMAN S., *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **216**, 279 (1916).
— Idem, *A* **217**, 115 (1917).
- [⁶] ENSKOG D., *Kinetische Theorie der Vorgänge in Mässige verdünnten Gasen*. Dissertation, Uppsala, Suède (1917).
- [⁷] CURTISS C. F. et HIRSCHFELDER J. O., *J. Chem. Phys.* **17**, 550 (1949).
- [⁸] HIRSCHFELDER J. O., CURTISS C. F. et BIRD R. B., *The Molecular Theory of Gases and Liquids*, ed. J. Wiley (New York) (1954).