Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 33e année, nº 12, 1964, pp. 731-735

SUR LES SURFACES DONT LES QUADRIQUES DE LIE ONT CINQ POINTS CARACTÉRISTIQUES

par Mme C. READ-DERCHAIN
Assistant à l'Université de Liège (*)

SOMMAIRE

Grilles hyperboliques et réseaux conjugués en relation avec des congruences associées à une surface.

1. Nous désignons par f^{ij} la dérivée partielle d'une fonction $f(u, v)$ prise i fois par rapport à u et j fois par rapport à v.

Dans un espace projectif à trois dimensions S_3, considérons une surface non réglée (x) rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes de WILCZYNSKI du point générateur x de (x) satisfont au système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles [1].

$$x^{20} + 2b\, x^{01} + c_1 x = 0, \quad x^{02} + 2a\, x^{10} + c_2 x = 0,$$

les fonctions a et b n'étant pas identiquement nulles.

Les invariants

$$h_1 = -(\log b)^{11} + 4ab,\ k_1 = -(\log \mathrm{a})^{11} + 4ab,$$

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log \mathrm{a})^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1),$$

$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2)$$

sont unis par les relations [1]

$$\alpha^{01} = -2k_1(\log a)^{10} - 2k_1^{10},\ \beta^{10} = -2h_1(\log b)^{01} - 2h_1^{01},$$
$$a\alpha^{10} + 2a^{10}\alpha = b\beta^{01} + 2b^{01}\beta.$$

Nous supposons dorénavant que les quadriques de LIE de la surface (x) ont cinq points caractéristiques. Dans cette hypothèse, les fonctions α et β ne sont pas identiquement nulles.

(*) Présenté par O. Rozet, le 17 décembre 1964.

2. Considérons, dans un espace linéaire S_5, l'hyperquadrique Q de KLEIN dont les points représentent les droites de S_3. Aux tangentes asymptotiques xx^{10} et xx^{01} au point x de (x) correspondent respectivement sur Q deux points U et V décrivant, quand u et v varient, des réseaux conjugués (u, v). Relativement à ces réseaux, U et V sont consécutifs dans une suite de LAPLACE de S_5

$$\ldots, U_n, \ldots, U_3, U_2, U_1, U, V, V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n, \ldots,$$

$V, V_1, \ldots$ étant les transformés successifs de U dans le sens des u, $U, U_1, \ldots$ les transformés successifs de V dans le sens des v. Nous supposons dorénavant que cette suite ne s'arrête pas à gauche avant U_3, à droite avant V_3.

3. Posons [1]

$$\xi^2 + \alpha = 0, \quad \eta^2 + \beta = 0.$$

Notons les identités

$$\xi\xi^{01} = k_1(\log a\, k_1)^{10}, \ \eta\eta^{10} = h_1(\log b\, h_1)^{01},$$

$$a\xi^2(\log a\ \xi)^{10} = b\ \eta^2(\log b\ \eta)^{01}$$

avec, dans nos hypothèses, $abh_1k_1\xi\eta \neq 0$.

Les côtés c_1, c_2, d_1, d_2 du quadrilatère de DEMOULIN [1] relatif au point x de (x) ont respectivement pour images sur Q les points

$$C_1 = V_2 + [\xi + (\log a\, k_1)^{10}]V_1, \ C_2 = V_2 + [-\xi + (\log a\, k_1)^{10}]V_1,$$

$$D_1 = U_2 + [\eta + (\log b\, h_1)^{01}]U_1, \ D_2 = U_2 + [-\eta + (\log b\, h_1)^{01}]U_1.$$

Quand u et v varient, ces points engendrent respectivement des surfaces (C_1), (C_2), (D_1), (D_2) images des congruences (c_1), (c_2), (d_1), (d_2) décrites par c_1, c_2, d_1, d_2 quand, dans S_3, x décrit la surface (x).

Nous allons à présent considérer la surface (C_1) [une étude parallèle de (C_2), (D_1) ou (D_2) conduirait à des résultats analogues].

4. I. Rappelons un résultat classique : la congruence (c_1) est W sous la condition nécessaire et suffisante $(a\xi)^{10} = 0$; de plus, les asymptotiques de ses nappes focales sont alors les courbes u et v.

Supposons qu'il en soit ainsi. Dans S_5, les courbes u et v portées par (C_1) forment sur cette surface un *réseau conjugué* (u, v). A partir de ce réseau, on attache au point générateur C_1 de (C_1) une suite de transformés (ordinaires) de LAPLACE, dont les deux premiers termes successifs dans le sens des v se confondent géométriquement avec les points respectifs $V_1 + \xi V$ et

$$J_{c_1} = 2a\xi U - (\xi^{01} + k_1)V.$$

Le point J_{c_1} engendre, quand u et v varient, une surface (J_{c_1}), image d'une congruence (j_{c_1}) de S_3 dont (x) est une des nappes focales.

II. Supposons à présent (c_1) non W $[(a\xi)^{10} \neq 0]$. M. Rozet [2][3] a montré que les courbes u et v de (C_1) forment alors sur cette surface une *grille hyperbolique* (u, v) [selon la terminologie introduite par M. B. Segre [5] dans l'article fondamental qu'il a consacré aux systèmes conjugués de 2^e^ espèce en involution].

Relativement à cette grille, le *premier transformé de* Laplace *d'espèce* 2 *de* C_1 *dans le sens des* v, situé dans le plan osculateur en C_1 à la courbe v de (C_1) passant par C_1, se confond géométriquement avec le point

$$2a\xi U - (\xi^{01} + k_1)V + \frac{\mathscr{K}_{c_1}}{(\log a\xi)^{10}}(V_1 + \xi V)$$

si l'on pose

$$\mathscr{K}_{c_1} = (\log a\xi)^{11} - \frac{k_1}{\xi}(\log a\xi)^{10}.$$

Ce point appartient à la droite UV sous la condition nécessaire et suffisante $\mathscr{K}_{c_1} = 0$. Dans l'hypothèse $\mathscr{K}_{c_1} = 0$ [avec $(a\xi)^{10} \neq 0$] il se confond donc avec le point $J_{c_1} = 2a\xi U - (\xi^{01} + k_1)V$; on sait [2] d'ailleurs qu'il engendre alors, quand u et v varient, une surface (J_{c_1}) sur laquelle les courbes u et v forment un *réseau conjugué* (u, v) : (J_{c_1}) est encore, comme dans le cas I, l'image d'une congruence $W(j_{c_1})$ de S_3 dont (x) est une des nappes focales.

5. Avec les notations des numéros 1, 2, 3 et sous les réserves que nous y avons formulées, considérons à présent, dans S_3, la congruence (j) admettant (x) pour une de ses nappes focales et engendrée quand x décrit (x) par une tangente non asymptotique j à (x) en x. La droite j a pour image sur l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 le point

$$J = \lambda U - \mu V \quad (\lambda\mu \neq 0)$$

qui engendre, quand j décrit (j), la surface (J) image de (j).

La congruence (j) est W (les asymptotiques des nappes focales étant alors nécessairement les courbes u et v) sous la condition nécessaire et suffisante $\mathscr{J} = 0$, si l'on pose

$$\mathscr{J} = \left(\log \frac{\lambda}{\mu}\right)^{11} + \left(\frac{2a\mu}{\lambda}\right)^{10} - \left(\frac{2b\lambda}{\mu}\right)^{01}.$$

Notons que l'invariant $\mathscr{J}$ s'écrit aussi

$$\mathscr{J} = -(\nu_1^{01} + k_1) + \frac{2a\mu}{\lambda}\nu_1$$

si l'on pose

$$\nu_1 = \left(\log \frac{2a\mu}{\lambda}\right)^{10} + \frac{2b\lambda}{\mu}.$$

(ν_1 ne peut être identiquement nul dans nos hypothèses).

I. Supposons d'abord (j) W ($\mathscr{J} = 0$). A partir du *réseau conjugué* (u, v) porté alors par (J), on attache au point générateur J de (J) une suite de transformés (ordinaires) de LAPLACE dont les deux premiers termes successifs dans le sens des u se confondent géométriquement avec les points respectifs $V_1 + \nu_1 V$ et

$$C_{1J} = C_1 + [-\xi + \nu_1 - (\log a\,\nu_1)^{10}]V_1.$$

Le point C_{1J} engendre, quand u et v varient, une surface (C_{1J}) sur laquelle les courbes u et v forment un *réseau conjugué* (u, v).

II. Supposons à présent (j) non W ($\mathscr{J} \neq 0$). On sait [4] que sur la surface (J) image de (j), les courbes u et v forment une *grille hyperbolique* (u, v). Relativement à cette grille, le *premier transformé de* LAPLACE *d'espèce* 2 de J *dans le sens des u*, situé dans le plan osculateur en J à la courbe u de (J) passant par J, se confond géométriquement avec le point

$$\frac{\lambda}{2a\mu}\mathscr{H}_J V + (\xi_1 - \xi)\,V_1 + V_2 + [\xi + (\log a\,k_1)^{10}]V_1$$

si l'on pose

$$\xi_1 = 2\nu_1 - (\log a\,\mathscr{J})^{10}$$

$$\frac{\lambda}{2a\mu}\mathscr{H}_J = \nu_1^{10} + \nu_1[\nu_1 - (\log \mathscr{J})^{10}].$$

Ce point appartient à la droite V_1V_2 sous la condition nécessaire et suffisante $\mathscr{H}_J = 0$. Dans l'hypothèse $\mathscr{H}_J = 0$ (avec $\mathscr{J} \neq 0$), il se confond donc avec $C_{1J} = C_1 + [\xi - \nu_1 - (\log a\, \nu_1)^{10}]V_1$. On sait d'ailleurs [4] qu'il engendre alors, quand u et v varient, une surface (C_{1J}) sur laquelle les courbes u et v forment un *réseau conjugué* (u, v).

6. Appliquons les résultats obtenus au numéro 5 à la congruence (j) engendrée par la droite j dont l'image sur l'hyperquadrique Q de KLEIN est le point $J = \lambda U - \mu V$ quand

$$\lambda = 2a\xi, \quad \mu = \xi^{01} + k_1$$

[moyennant les réserves formulées aux numéros 1, 2 et 3, $\lambda\mu = 2a\xi(\xi^{01} + k_1) \neq 0$].

Nous obtenons alors

$$\nu_1 = \xi + \frac{\xi \mathscr{K}_{c_1}}{\xi^{01} + k_1},$$

$$\mathscr{J} = \mathscr{K}_{c_1} - \left(\frac{\xi \mathscr{K}_{c_1}}{\xi^{01} + k_1}\right)^{01}$$

$$\mathscr{H}_J = \frac{\xi^{01} + k_1}{\xi} \{\nu_1^{10} + \nu_1[\nu_1 - (\log \mathscr{J})^{10}]\}.$$

En particulier, si $\mathscr{K}_{c_1} = 0$, que $(a\xi)^{10}$ soit nul ou non, on a $\nu_1 = \xi$, $\mathscr{J} = 0$; dans ce cas le point C_{1J} s'écrit

$$C_{1J} = C_1 - (\log\ a\xi)^{10}V_1$$

[confondu avec C_1 moyennant $(a\xi)^{10} = 0$].

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. GODEAUX, La théorie des surfaces et l'espace réglé, Actualités scientifiques et industrielles, Paris, Hermann, 1934.

[2] O. ROZET, Sur les surfaces dont les quadriques de LIE ont cinq points caractéristiques, *Bull. des Sciences Mathématiques*, 2e série, t. LX, juin 1936, pp. 1-12.

[3] O. ROZET, Sur les suites de LAPLACE et les grilles hyperboliques, *Bull. Soc. Roy. des Sciences de Liège*, no 3, 1957, pp. 105-111.

[4] O. ROZET, Note sur les congruences de droites, *Bull. Soc. Roy. des Sciences de Liège*, no 6, 1942, pp. 338-343.

[5] B. SEGRE, Les systèmes conjugués de 2e espèce en involution, ou grilles, *Annales Fac. des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. XX, 1928, pp. 1-46.