Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 53e année, 2, 1984, pp. 88-92

DÉCOMPOSITIONS BOOLÉENNES DE LATTIS DISTRIBUTIFS BORNÉS

par G. HANSOUL et L. VRANCKEN-MAWET

Summary.

In this note, we prove that the Priestley dual of a Boolean product of bounded distributive lattices is isomorphic to the disjoint sum of the Priestley duals of the stalks and we also establish the correspondence between the Boolean decompositions of a bounded distributive lattice L and certain congruences on its Priestley dual.

La notion de faisceau d'algèbres sur un espace de Boole est une notion de plus en plus étudiée et appliquée en algèbre universelle. Dans cette courte note, nous caractérisons le dual de Priestley d'un produit booléen de lattis distributifs bornés et nous établissons le lien entre les décompositions booléennes d'un lattis distributif borné et la notion de congruence sur un espace de Priestley, telle qu'elle est introduite dans [3].

On note $\mathbb{D}$ la catégorie des lattis distributifs bornés. Rappelons ([4] , p. 44) qu'un produit sous-direct L d'une famille $(L_x | x \in X)$ d'éléments de $\mathbb{D}$ en est un *produit booléen* si l'on peut munir X d'une topologie d'espace de Boole telle que

1) si $a,b \in L$, alors $[\![a = b]\!]$ $(= \{x \in X | a_x = b_x\})$ est ouvert;

2) si $a,b \in L$ et si W est ouvert fermé dans X, alors $1 = a|_W \cup b|_{-W}$ (défini par $1_x = a_x$ si $x \in W$ et $1_x = b_x$ si $x \notin W$) $\in L$.

Cette définition diffère légèrement de celle adoptée par Burris et Sankappanavar dans [1] p. 155, qui exigent la condition supplémentaire:

3) si $a,b \in L$, alors $[\![a = b]\!]$ est fermé.

Les produits booléens vérifiant 3) seront appelés ici *produits booléens séparés,* pour des raisons qui apparaissent clairement dans [4], p. 47.

Plus généralement, si $L \in \mathbb{D}$, une *décomposition booléenne* (resp. *séparée*) de L est un plongement $p:L \to \prod_{x \in X} L_x$ tel que p(L) soit produit booléen (resp. séparé) de $(L_x | x \in X)$. On dit que p *réalise* la décomposition dont les lattis L_x sont appelés les *fibres*.

Remarquons que, compte tenu de 1), $\{x \in X | L_x$ est trivial$\}$ $(= [\![o = 1]\!])$ est un ouvert de X. Dès lors, $X_o = \{x \in X | L_x$ n'est pas trivial$\}$ est un espace de Boole et

Présenté par L. Nollet, le 15 mars 1984.

il est évident que L reste produit booléen de $(L_x | x \in X_o)$ s'il est produit booléen de $(L_x | x \in X)$. Ainsi, nous supposerons dans le reste de ce travail que L_x est non trivial, pour tout $x \in X$.

Notons $\mathbb{P}$ la catégorie des espaces de Priestley, i.e des espaces compacts et totalement disconnexes pour l'ordre (en abrégé t.o.d.) et des applications continues et isotones entre ces espaces ([2], p. 186). Pour $L \in \mathbb{D}$, on note $P(L)$ le spectre premier de L, i.e. l'ensemble ordonné des idéaux premiers de L, et $r_L(l)$ $(l \in L)$ l'ensemble $\{\alpha \in P(L) | \alpha \not\ni l\}$. Il est bien connu que $P(L)$, nanti de la topologie engendrée par les $r_L(l)$ et $-r_L(l)$ $(l \in L)$ est un espace de Priestley, appelé *dual* de L. Si P est un espace de Priestley, l'ensemble ordonné des ouverts fermés décroissants de P est un lattis distributif borné, appelé *dual* de P et noté $O(P)$. Les applications P et O réalisent une équivalence duale entre $\mathbb{P}$ et $\mathbb{D}$: si $L \in \mathbb{D}$, L est isomorphe à $OP(L)$ par r_L et si $P \in \mathbb{P}$, P est isomorphe à $PO(P)$ par $s_P : \alpha \to \{U \in O(P) | U \not\ni \alpha\}$. Nous renvoyons à [2] pour d'autres propriétés fondamentales de la dualité de Priestley.

Le dual de Priestley d'un produit booléen de lattis distributifs bornés est particulièrement aisé à caractériser en termes des duaux des fibres. Rappelons que la somme cardinale $\sum_{x \in X} P_x$ d'ensembles ordonnés $P_x (x \in X)$ est l'ensemble dont le support est l'union disjointe des supports des P_x et l'ordre l'union disjointe (correspondante) des ordres sur P_x.

1. PROPOSITION. *Si* L *est un produit booléen de* $(L_x | X \in X)$ *dans* $\mathbb{D}$, *alors* $P(L)$ *est isomorphe à la somme cardinale* $\sum_{x \in X} P(L_x)$, *nantie de la topologie engendrée par les* $r(l)$ *et* $-r(l)$, *où* $l \in L$ *et* $r(l) = \sum_{x \in X} r_{L_x}(l_x)$.

<u>Démonstration</u>. Notons P l'espace $\sum_{x \in X} P(L_x)$. Par définition, $r(l) \in O(P)$ pour tout $l \in L$. Prouvons que la famille des $r(l)$, $l \in L$, est séparante, c'est-à-dire que si $\alpha \not\leq \beta$ dans P, il existe $l \in L$ tel que $\beta \in r(l)$ et $\alpha \notin r(l)$. Supposons $\alpha \in P(L_x), \beta \in P(L_y)$. Si $x \neq y$, il existe $W \in O(X)$ contenant x et non y. alors $l = o|_W \cup \mathbb{1}|_{-W}$ convient. Si $x = y$, alors $\alpha \not\leq \beta$ dans $P(L_x)$ et il existe $m \in L_x$ tel que $\beta \in r_{L_x}(m)$ et $\alpha \notin r_{L_x}(m)$. Dès lors, tout $l \in L$ tel que $l_x = m$ convient.

Ainsi, P est t.o.d. Pour établir sa compacité, considérons un recouvrement $(r(l_i), i \in I; \; -r(m_j), j \in J)$ de P. Pour chaque $x \in X, (r(l_{ix}), i \in I; -r(m_{jx}), j \in J)$ constitue un recouvrement de $P(L_x)$ et il existe I_x fini $\subseteq I, J_x$ fini $\subseteq J$ tels que $P(L_x) = \bigcup_{i \in I_x} r_{L_x}(l_{ix}) \cup \bigcup_{j \in J_x} -r_{L_x}(m_{jx}) = r_{L_x}(l_x) \cup -r_{L_x}(m_x)$, où $l_x = \bigvee_{i \in I_x} l_i$ et $m_x = \bigwedge_{j \in J_x} m_j$. Cette égalité équivaut en fait à $m_x \leq l_x$ pour tout x, de sorte que les $E_x = [\![m_x \leq l_x]\!]$ forment un recouvrement ouvert de X dont on peut extraire un recouvrement fini $(E_x | x \in F)$, F fini $\subseteq$ X. Il est alors clair que $(r(l_i), i \in \bigcup_{x \in F} I_x;$ $-r(m_j), \; j \in \bigcup_{x \in F} J_x)$ est un recouvrement fini de P.

Il reste à prouver que le dual de P est isomorphe à L. L'application $l \to r(l)$ est un plongement de L dans $\mathcal{O}(P)$. Pour prouver qu'il est surjectif, il suffit de remarquer que $(r(l) | l \in L)$ est une famille séparante d'ouverts fermés décroissants de P, fermée pour les unions et intersections finies, et d'invoquer la preuve du théorème 1, p. 187 de [2].

Le concept de décomposition booléenne d'un lattis $L \in \mathbb{D}$ est intimement lié à celui de congruence sur un espace de Priestley P. Rappelons qu'une *congruence* sur un espace de Priestley P est une équivalence Θ telle que le quotient de P par Θ puisse être muni d'une structure d'espace de Priestley Q pour laquelle la projection $\pi: P \to Q$ soit continue et isotone ([3], p. 3). Dans [3], on prouve qu'une équivalence Θ sur P est une congruence si, quel que soit $(\alpha,\beta) \notin \Theta$, il existe $U \in \mathcal{O}(P)$ Θ-saturé (i.e. union de Θ-classes) séparant α de β. L'ensemble $\mathrm{Con}(P)$ des congruences sur P est un lattis complet dans lequel l'infimum coïncide avec l'intersection. Si $\Theta \in \mathrm{Con}P$, il existe une structure "minimum" canonique P/Θ sur le quotient, que l'on peut décrire ainsi: la topologie sur P/Θ est la topologie quotient, et $\alpha^\Theta \leq \beta^\Theta$ si quelque soit $U \in \mathcal{O}(P)$ Θ-saturé, $U \ni \beta$ implique $U \ni \alpha$. Finalement, une congruence Θ est dite *ouverte* si la projection $\pi: P \to P/\Theta$ est ouverte.

2. LEMME. *Avec les notations et les hypothèses de la Proposition 1, désignons par* Θ *l'équivalence sur* $P(L) = \sum_{x \in X} P(L_x)$ *identifiant* α *et* β *s'il existe* $x \in X$ *tel que* $\alpha,\beta \in P(L_x)$. *Alors* $\Theta \in \mathrm{Con}P(L)$, $P(L)/\Theta$ *est isomorphe à* X *et chaque classe* α^Θ *est isomorphe au dual de la fibre* L_x, *où* $\alpha \in P(L_x)$.

De plus, L *est produit booléen séparé de* $(L_x | x \in X)$ *si et seulement si* Θ *est une congruence ouverte.*

Démonstration. Pour prouver la première assertion, notons d'abord que la surjection naturelle $\pi: P(L) \twoheadrightarrow X$ définie par $\pi(\alpha) = x$ si $\alpha \in P(L_x)$ (de noyau θ) est continue et isotone. En effet, si $W \in \mathcal{O}(X)$, alors $\pi^{-1}(W) = r(l)$ où $l = 0|_{-W} \cup 1|_W$, et si $\alpha \leq \beta$ dans $P(L)$, alors $\alpha \,\Theta\, \beta$ et $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$. Ainsi, id: $P(L)/\Theta \to X$ est un homéomorphisme isotone. Puisque X est non-ordonné, id est en fait un isomorphisme. La Θ-classe de α est $P(L_x)$ si $\alpha \in P(L_x)$ et est donc duale de L_x.

Supposons maintenant que L soit produit booléen séparé des L_x. Soit $U = r(l) - r(m)$ un ouvert de base de $P(L)$. Alors $\pi(W) = \{x \in X | P(L_x)$ rencontre $r(l) - r(m)\} = \{x \in X | r_{L_x}(l_x) - r_{L_x}(m_x) \neq \emptyset\} = \{x \in X | l_x \nleq m_x\} = -[\![l \leq m]\!]$ est ouvert par 3). Réciproquement, si $\pi: P(L) \to X$ est une application ouverte et si $l,m \in L$, alors $[\![l \neq m]\!] = \{x \in X | r_{L_x}(l_x) \,\Delta\, r_{L_x}(m_x) \neq \emptyset\} = \pi(r(l) \,\Delta\, r(m))$ est ouvert de sorte que $[\![l = m]\!]$ est fermé (dans ce qui précède, Δ désigne la différence symétrique).

3. DEFINITIONS. Deux décompositions booléennes $(L_x | x \in X)$ et $(M_y | y \in Y)$ d'un lattis $L \in \mathbb{D}$ sont dites *équivalentes* s'il existe un homéomorphisme $\psi: X \to Y$ tel que L_x soit isomorphe à $L_{\psi(x)}$ pour tout $x \in X$.

Deux congruences Θ et ϕ sur un espace de Priestley P sont dites *équivalentes* s'il existe un isomorphisme $\psi:P/\Theta \to P/\phi$ tel que la classe α^{Θ} soit isomorphe à la classe $\psi(\alpha^{\Theta})$ pour tout $\alpha \in P$.

4. THEOREME. *L'ensemble des types d'équivalence des décompositions booléennes (resp. séparées) d'un lattis* $L \in \mathbb{D}$ *est en correspondance biunivoque avec celui des types d'équivalence des congruences (resp. ouvertes) sur le dual* L *dont le quotient est non-ordonné.*

Démonstration. Soit $\Theta \in \mathrm{Con}P(L)$ tel que le quotient X de $P(L)$ par Θ soit non-ordonné. Pour $x \in X$, on note L_x le lattis dual de la classe x (considérée comme fermé de $P(L)$). Si $U \in O(P(L))$, on note $p(U)$ l'élément de $\prod_{x\in X} L_x$ dont la $x^{\text{ème}}$ composante est $U \cap x$. Alors p réalise une décomposition booléenne de $O(P(L))$, que nous noterons $L(\Theta)$. L'application p est un plongement (car $U = \bigcup_{x\in X} (U \cap x)$) sous-direct (si $x \in X$ et $W \in O(X)$, il existe $U \in O(P(L))$ tel que $U \cap x = W$). Vérifions que les conditions de la définition des produits booléens sont satisfaites.

1) Si $U,V \in O(P(L))$, alors $[\![U = V]\!] = \{x \in X | U \cap x = V \cap x\} = \{x \in X | x \subseteq -(U \Delta V)\} = -\pi(U \Delta V)$ (où π est la projection $P(L) \to X$) est ouvert car π est fermé.

2. Si $U,V\in O(P(L))$, et $W\in O(X)$, alors $U|_W \cup V|_{-W} = (U\cap\pi^{-1}(W)) \cup (V\cap\pi^{-1}(-W))$ est un élément de $O(P(L))$.

3) Si Θ est ouvert, alors π est ouvert et $[\![U = V]\!]$ est fermé pour $U,V \in OP(L)$.

L'application $\theta \to L(\Theta)$ est visiblement définie sur les types d'équivalence de congruences sur $P(L)$. C'est une bijection et son inverse est donnée par le lemme 2.

Terminons cette note en donnant quelques résultats sur la structure de la classe des décompositions booléennes d'un lattis $L \in \mathbb{D}$. Il faut d'abord caractériser les congruences sur un espace de Priestley P telles que le quotient soit non-ordonné.

5. LEMME. *Si* $P \in \mathbb{P}$ *et si* $\Theta \in \mathrm{Con}P$, *alors* P/Θ *est non-ordonné si et seulement si* $\alpha \leqslant \beta$ *implique* $\alpha\,\Theta\,\beta$ *(autrement dit toute partie* Θ*-saturée est union de composantes connexes pour l'ordre).*

Démonstration. Si $\alpha \leqslant \beta$ et $(\alpha,\beta) \notin \Theta$, alors $\alpha^{\Theta} < \beta^{\Theta}$ et P/Θ n'est pas non-ordonné.

Réciproquement, supposons que $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \alpha\,\Theta\,\beta$. Soit Q l'espace de Boole sous-jacent à P/Θ, considéré comme espace de Priestley non ordonné. Alors la projection canonique $\pi:P \to Q$ est continue et isotone (si $\alpha \leqslant \beta$, alors $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$). Dès lors, P/Θ coïncide avec Q et est non-ordonné.

6. COROLLAIRE. *L'ensemble* C *des congruences sur un espace de Priestley* P *dont le quotient est non-ordonné admet un plus petit élément* Θ_0. *Autrement dit, parmi les décompositions booléennes d'un lattis* $L \in \mathbb{D}$, *il en est une plus fine. La congruence* Θ_0 *sur* P *lie* α *à* β *si et seulement si pour tout* $U \in O(P)$ *à la fois croissant et décroissant* $U \ni \alpha \Rightarrow U \ni \beta$.

Démonstration. Par le lemme 5, une intersection de congruences sur P dont le quotient est non-ordonné est une congruence, dont le quotient est non-ordonné. Ainsi C admet un plus petit élément. Pour le caractériser, notons Θ_o l'équivalence définie dans l'énoncé. Si l'on remarque que tout $U \in O(P)$ à la fois croissant et décroissant est Θ_o-saturé, on déduit du lemme 5 et des remarques précédant le lemme 2 que $\theta_o \in C$. Visiblement, Θ_o est le minimum de C.

7. REMARQUE. Si l'on se restreint aux décompositions booléennes séparées d'un lattis $L \in \mathbb{D}$, c'est-à-dire si l'on se restreint au sous-ensemble C' de C constitué des congruences ouvertes, la situation se complique du fait que C' se comporte de façon assez anarchique en général. Même si C' est un sous-lattis de C, il ne possède pas nécessairement de minimum, ni même d'élément minimal, comme le montre l'exemple du compactifié $\omega \cup \{\omega\}$ d'Alexandroff de l'ensemble des naturels, ordonné par $o < \omega$.

REFERENCES.

[1] BURRIS S. and SANKAPPANAVAR H.P., *A course in Universal Algebra*, Graduate texts in Mathematics, n°78, Springer-Verlag, Berlin (1981).

[2] PRIESTLEY H.A., *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces*, Bull. of the London Math. Soc., 2(1970), 186-190.

[3] VRANCKEN-MAWET L., *The lattice of* R-*subalgebras of a bounded distributive lattice*, preprint.

[4] WERNER H., *Algebraic representation and model theoretic properties of algebras with the ternary discriminator*, Mathematik Habilitationsschrift, Technischen Hochschule Darmstadt, preprint 237.

Université de Liège
Institut de Mathématique
Avenue des Tilleuls, 15
B-4000 Liège (Belgique)