Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 70, 4-5-6, 2001, pp. 407-433

SYSTÈMES UNIFORMÉMENT DIAGONALISABLES, DIMENSION RÉDUITE ET SYMÉTRIE I.

J. VAILLANT

UNIFORMLY DIAGONALIZABLE SYSTEMS, REDUCED DIMENSION AND SYMMETRY I.

À LA MÉMOIRE DE PASCAL LAUBIN

ABSTRACT

$\mathfrak{a}(x)$ is a strongly hyperbolic matrix 5×5, of reduced dimension superior or equal to : $\frac{(5+1)\times 5}{2} - 2 = 13$; we state that $\mathfrak{a}(\xi)$ is presymmetric. The two first parts of the proof are given here.

Keywords : systems, partial differential equations, hyperbolic.
MSC 35 L 40, 35 E 20.

RÉSUMÉ

$\mathfrak{a}(\xi)$ est une matrice 5×5 fortement hyperbolique de dimension réduite supérieure ou égale à : $\frac{(5+1)\times 5}{2} - 2 = 13$; on établit qu'elle est présymétrique. Les 2 premières parties de la preuve sont données ici.

Mots clés : systèmes, équations aux dérivées partielles, hyperboliques.
MSC 35 L 40, 35 E 20.

INTRODUCTION

Nous considérons un système linéaire d'opérateurs différentiels du premier ordre :

$$\mathfrak{a}(D) = \mathrm{I}D_o + \sum_{n=1}^{k=n} a_k D_k$$

où I est la matrice identité d'ordre m et les a_k sont des matrices carrées réelles d'ordre m.

$$\text{Soit : } \mathfrak{a}(\xi) = I\xi_o + \sum_{n=1}^{k=n} a_k \xi_k \text{, le symbole principal de } a(D).$$

On a défini de façon intrinsèque la dimension réduite de $\mathfrak{a}$ [5], soit $d(\mathfrak{a})$, et ses propriétés ont été établies dans [1] et [6] : $d(\mathfrak{a})$ est invariante par les changements linéaires de coordonnées de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui conservent $N = (1,0,\ldots,0)$ et par les changements linéaires de coordonnées de l'espace $\mathbb{R}^m$ des valeurs.

$d(\mathfrak{a}) = \text{rang}(\mathfrak{a}) =$ dimension du sous espace vectoriel de $M(m,\mathbb{R})$ engendré par : I, $a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_n$.

Nous avons aussi la définition [6] : $\mathfrak{a}$ est présymétrique par rapport à N, si et seulement si : il existe une base de $\mathbb{R}^{n+1}$ de premier vecteur N et une base de $\mathbb{R}^m$ telles que dans ces bases les matrices $\mathfrak{a}^i_j(\xi)$ sont symétriques pour tout ξ.

Nous avons un résultat précédent.

Théorème 0. [6]

Si $\mathfrak{a}(D)$ est fortement hyperbolique par rapport à N, si $m = 4$ et si $d(\mathfrak{a}) \geq \frac{4(4+1)}{2} - 2 = 8$ alors : $\mathfrak{a}(\xi)$ est présymétrique.

Remarques.

1°) On suppose : $m \geq 3$, $d(\mathfrak{a}) \geq \frac{m(m+1)}{2} - 1$ et $\mathfrak{a}$ diagonalisable par rapport à N, la pré symétrie est obtenue dans [1].

2) Si $m = 3$, il est montré dans [3] que la condition sur $d(\mathfrak{a})$ ne peut être améliorée.

3°) Pour $m = 2$, hyperbolicité forte et présymétrie sont équivalentes [4].

Nous voulons prouver pour $m = 5$, le cas général étant analogue, le

Théorème.

Si $\mathfrak{a}(D)$ est fortement hyperbolique par rapport à N, si $m \geq 4$ et si $d(\mathfrak{a}) \geq \frac{m(m+1)}{2} - 2$, alors $\mathfrak{a}$ est présymétrique par rapport à N.

La preuve se décompose en 3 parties. Nous donnons ici les deux premières parties. La troisième partie paraîtra dans [7].

Le cas des coefficients variables correspondant à la remarque 1 a été considéré dans [2]. Le cas des coefficients variables correspondant au théorème considéré ici est en préparation.

§ I Rappels. Plan de la démonstration. Premiers lemmes.

Nous notons aussi ϕ_j^i les éléments de la matrice $\mathfrak{a}$. Nous savons [5] et [1] que, grâce à la diagonalisabilité de $\mathfrak{a}$ nous pourrons supposer que

i) pour tout $p < q$, $\phi_q^p \in$ espace engendré par $\left\{\phi_j^i, i > j\right\} = V$;

ii) pour $1 \leq i \leq n$, $\phi_i^i(\xi) - \left(\xi_o + \psi_i(\xi')\right) \in V$, $\xi' = \left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right)$, ainsi :

$$d(\mathfrak{a}) = \text{dim. espace engendré par } \{V, \xi_o + \psi_i\} ;$$

on peut supposer qu'un ψ_i est nul.

On peut supposer que $d(\mathfrak{a}) = \dfrac{m(m+1)}{2} - 2$; les cas $d(\mathfrak{a}) = \dfrac{m(m+1)}{2}$ et $d(\mathfrak{a}) = \dfrac{m(m+1)}{2} - 1$ ayant été considérés dans [5] et [1].

Nous distinguerons trois cas :

I $\dim V = \dfrac{m(m-1)}{2} = \dfrac{m(m+1)}{2} - m.$

Cela signifie que toutes les formes linéaires $\phi_j^i \in V$ sont linéairement indépendantes et que deux formes de la diagonale dépendent linéairement des formes de V et des autres formes de la diagonale.

II $\dim V = \dfrac{m(m-1)}{2} - 1 = \dfrac{m(m+1)}{2} - m - 1.$

Une forme de V dépend linéairement des autres ; une forme de la diagonale dépend linéairement des formes de V et des autres formes de la diagonale.

III $\dim V = \dfrac{m(m-1)}{2} - 2 = \dfrac{m(m+1)}{2} - m - 2.$

Les formes de la diagonale sont linéairement indépendantes ; deux formes de V dépendent linéairement des autres formes de V.

Lemme 1.1.

Si la matrice 5×5 : $a(\xi') = \begin{pmatrix} & & & & * \\ & \beta(\xi') & & & * \\ & & & & * \\ & & & & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi'(\xi') \end{pmatrix}$ est uniformément diagonalisable, alors la matrice 4×4 :

$\beta(\xi')$ est uniformément diagonalisable.

Preuve.

Soit $\lambda(\xi')$ une valeur propre de $\beta(\xi')$; $\forall \xi'$ tel que $-\psi(\xi')$ n'est pas valeur propre de $\beta(\xi')$, il existe un diagonalisateur de $a(\xi')$ de la forme :

(1) $$\Delta(\xi') = \begin{pmatrix} & & & & * \\ & \delta(\xi') & & & * \\ & & & & * \\ & & & & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U(\xi') \end{pmatrix}, \ \|\Delta(\xi')\| < M, \det |\Delta(\xi')| \geq \varepsilon > 0.$$

$\forall \xi'$ tel que $-\psi(\xi')$ est valeur propre multiple d'ordre μ de $\beta(\xi')$, il existe un diagonalisateur de la forme :

$$\Delta(\xi') = \begin{pmatrix} * & * & * & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & & & & & \\ * & * & \cdots & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & U^5_{5-\mu}(\xi') & \cdots & U^5_5(\xi') \end{pmatrix}, \ \|\Delta(\xi')\| < M, \det |\Delta(\xi')| \geq \varepsilon > 0.$$

On a $\sup\left|U^5_{5-\mu}(\xi'),\cdots,U^5_5(\xi')\right| \times M^4 \times(\mu+1) \geq \varepsilon > 0$; en choisissant convenablement la numérotation, on a donc : $\left|U^5_5(\xi')\right| \geq \varepsilon_1$.

On remplace, $(4 \geq k \geq 5-\mu)$,

$$\vec{U}_k(\xi') \text{ par } \vec{U}_k(\xi') - U^5_k(\xi')\frac{\vec{U}_5(\xi')}{U^5_5(\xi')}.$$

On obtient un diagonalisateur de $a(\xi')$ de la forme (1). Dans tous les cas, on a :

$$\|\Delta(\xi')\| \leq M' \text{ et } \det|\Delta(\xi')| \geq \varepsilon\,;$$

on en déduit que $\beta(\xi')$ est diagonalisable par $\delta(\xi')$, avec : $\|\delta(\xi')\| \leq M'$ et : $\det|\delta(\xi')| \geq \varepsilon' > 0$.

Lemme 1.2.

Si la matrice 5×5 : $a(\xi') = \begin{pmatrix} & \beta(\xi') & & * & * \\ & & & * & * \\ & & & * & * \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \beta'(\xi') & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}$, est diagonalisable, alors la matrice 3×3 $\beta(\xi')$ est diagonalisable.

Preuve.

$\forall\xi'$ tel que $\beta(\xi')$ et $\beta'(\xi')$ n'ont pas de valeur propre commune, on obtient un diagonalisateur de $a(\xi')$ de la forme :

$$\Delta(\xi') = \begin{pmatrix} & & & * & * \\ & \delta(\xi') & & * & * \\ & & & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}, \ \det(\Delta(\xi')) \neq 0\,.$$

Et par suite $\delta(\xi')$ diagonalise $\beta(\xi')$.

$\forall\xi'$ tel que $\lambda(\xi')$ est valeur propre simple de $\beta'(\xi')$ et multiple d'ordre μ de $\beta(\xi')$, comme $a(\xi')$ est diagonalisable, les mineurs d'ordre $5-\mu$ de : $-\lambda(\xi')\, I_5 + a(\xi')$ sont tous nuls. Si l'un des 2 éléments non diagonaux de $\beta'(\xi')$ n'est pas nul, on en déduit que les mineurs d'ordre 5-μ-1 de $-\lambda(\xi')I_3 + \beta(\xi')$ sont tous nuls et que la dimension du noyau de $-\lambda(\xi')I_3 + \beta(\xi')$ est égale à μ ; on en déduit que $\beta(\xi')$ est diagonalisable. Si les 2 éléments non diagonaux de $\beta'(\xi')$ sont nuls, on obtient aisément que $\beta(\xi')$ est diagonalisable.

§.II *Preuve du cas I.*

Grâce à l'hypothèse de diagonalisabilité et en choisissant convenablement les coordonnées dans $\mathbb{R}^{n+1}$ on peut considérer $\mathfrak{a}$ sous la forme :

$$\mathfrak{a}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_o + \psi_1(\xi'',\psi_2,\psi_3) & & & & \\ & \xi_o + \psi_2 & & \phi^i_j(\xi'') & \\ & & \xi_o + \psi_3 & & \\ & \xi^i_j & & \xi_o & \\ & & & & \xi_o + \psi_5(\xi'',\psi_2,\psi_3) \end{pmatrix}$$

$\left\{\xi^i_j | i > j\right\}$ et ψ_2, ψ_3, ξ_o sont les nouvelles coordonnées ; $\xi'' = (\ldots,\xi^i_j,\ldots)$, $i > j$. On note, $i < j$:

$$\phi^i_j(\xi'') = \sum_{\ell>k} c^{ik}_{j\ell}\xi^\ell_k \;;\; c^{ii}_{jj} = c^i_j \;;\; \psi_1(\xi'',\psi_2,\psi_3) = c_{12}\,\psi_2 + c_{13}\,\psi_3 + \sum_{\ell>k} c^k_{1\ell}\xi^\ell_k.$$

Lemme 2.1.

On pose : $\xi^5_1 = \xi^5_2 = \xi^5_3 = \xi^5_4 = 0$; on note b la matrice :

$$b = \left\{\phi^i_j | 1 \leq i,\ j \leq 4\right\}.$$

b est présymétrique.

La dimension réduite de b est 9 ; de plus b est uniformément diagonalisable par le lemme1.1 ; il résulte alors du théorème O que b est présymétrique.

Lemme 2.2.

$c^{ik}_{j\ell} = 0$ pour $1 \leq i < 4$, et $i < j \leq 4$; $1 \leq k < \ell \leq 4$, $(k, \ell) \neq (i,j)$. $c^i_j = c^i_k c^k_j$, pour $1 \leq i < k < j \leq 4$; $c^i_j > 0$.

Nous utilisons le début du lemme 2.3 de [1] : il existe une matrice réelle définie positive H telle que :

$$b(\xi)H = H\,{}^t b(\xi). \tag{2}$$

On note $H = \left(h_{k\ell}\right)$; $h_{ii} = h_i$. On considère les éléments de la $(5-k)^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne des matrices de (2) ; $1 \leq k \leq 2$; $2 \leq j \leq 4-k$; on obtient, comme ψ_2, ψ_3 et les ξ sont linéairement indépendants.

$$h_{24} = h_{23} = h_{34} = 0.$$

On considère l'élément de la $(5-k)^{\text{ème}}$ ligne, $1^{\text{ère}}$ colonne, $1 \leq k \leq 3$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\xi^4_1 h_1 + \xi^4_2 h_{12} + \xi^4_3 h_{13} = h_{14}\psi_1 + h_4\phi^1_4 \\
&\xi^3_1 h_1 + \xi^3_2 h_{12} + \psi_3 h_{13} + \phi^3_4 h_{14} = h_{13}\psi_1 + h_3\phi^1_3 \\
&\xi^2_1 h_1 + \psi_2 h_{12} + \phi^2_3 h_{13} + \phi^2_4 h_{14} = h_{12}\psi_1 + h_2\phi^1_2
\end{aligned} \tag{3}$$

Si ($c_{12} \neq 0$ ou $c_{13} \neq 0$) et ($c_{12} \neq 0$ ou $c_{13} \neq 1$) et ($c_{12} \neq 1$ ou $c_{13} \neq 0$), on obtient :

$$h_{12} = h_{13} = h_{14} = 0$$

et H est diagonale ; on obtient le résultat du lemme, en considérant les éléments de la $(5-k)^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne : $1 \leq k \leq 3$; $2 \leq j \leq 4-k$; on obtient :

$$\xi^\ell_k h_k = h_\ell \phi^\ell_k,\ k \geq \ell > h \geq 1,$$

d'où aisément le résultat.

Si $c_{12} = c_{13} = 0$, on obtient $h_{12} = h_{13} = 0$.

$$c^{31}_{42} = c^{31}_{44} = c^{32}_{43} = c^{32}_{44} = 0 \ ; \ c^3_4 = \frac{h_3}{h_4} \ ; \ c^{31}_{43} = -\frac{h_{14}}{h_{44}}$$

$$c^{21}_{43} = c^{21}_{44} = c^{22}_{43} = c^{23}_{44} = 0 \ ; \ c^2_4 = \frac{h_2}{h_4} \ ; \ c^{21}_{42} = -\frac{h_{14}}{h_4}$$

$c_{32}^{21} = c_{33}^{21} = c_{34}^{21} = c_{34}^{22} = c_{34}^{23} = 0$; $c_3^2 = \frac{h_2}{h_3}$.

$$h_{14}\, c_{1\ell}^{k} + h_4 c_{4\ell}^{1k} = 0 \ , \ (k,\ell) \neq (1,4)$$

$$h_1 = h_{14} c_{14}^{1} + h_4 c_4^1$$

$$c_{32}^{11} = c_{34}^{11} = c_{33}^{12} = c_{34}^{12} = 0 \ ; \ c_4^3 h_{14} = h_3 c_{34}^{13}$$

$$h_1 + h_{14} c_{43}^{31} = h_3 c_3^1$$

$$c_{23}^{11} = c_{24}^{11} = c_{23}^{12} = c_{24}^{13} = 0 \ ; \ c_4^2 h_{14} = h_2 c_{24}^{12}$$

$$h_1 + h_{14} c_{42}^{21} = h_2 c_2^1 .$$

On note e_4^1 la matrice 5×5 dont tous les éléments sont nuls sauf l'élément de la 1ère ligne, 4ème colonne qui est égal à 1. On transforme la matrice de a par la matrice inversible

$I + \frac{h_{14}}{h_4} e_4^1$:

$$\left(I + \frac{h_{14}}{h_4} e_4^1\right)^{-1} (a) \left(I + \frac{h_{14}}{h_4} e_4^1\right),$$

ce qui revient à faire un changement de base de $\mathbb{R}^m$. On écrit la matrice de $\mathfrak{a}$ dans la nouvelle base ; compte tenu des relations obtenues, on obtient les mêmes résultats que dans le cas précédent. Si $c_{12} = c_{13} = 1$, on obtient $h_{12} = h_{14} = 0$; on transforme la matrice de a par

$I_o + \frac{h_{13}}{h_3} e_3^1$ et on obtient les même résultats.

Si $c_{12} = 1$, $c_{13} = 0$, on obtient : $h_{13} = h_{14} = 0$, on transforme la matrice de a par :

$$I_o + \frac{h_{12}}{h_2} e_2^1 .$$

et on obtient les mêmes résultats.

Lemme 2.3.

On pose : $\xi_1^2 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = \xi_1^5 = 0$; on note b_1 la matrice obtenue en rayant dans $\mathfrak{a}$ la 1ère ligne et la 1ère colonne.

b_1 est présymétrique.

• La preuve se réduit par symétries à celle du lemme 2.1.

Lemme 2.4.

$c^{ik}_{j\ell} = 0$ pour $2 \leq i < 5$ et $i < j \leq 5$, $2 \leq k < \ell \leq 5$, $(k,\ell) \neq (i,j)$, $c^i_j = c^i_k c^k_j$, pour $i < k < j$.

• La preuve se réduit à celle du lemme 2.2.

Lemme 2.5.

On pose : $\xi^4_1 = \xi^4_2 = \xi^4_3 = 0$; $c^4_5\ \xi^5_4 + c^{4\ 1}_{5\ 2}\ \xi^2_1 + c^{4\ 1}_{5\ 3}\ \xi^3_1 + c^{4\ 1}_{5\ 5}\ \xi^5_1 = 0$; comme $c^4_5 \neq 0$, on exprime ξ^5_4 comme fonction linéaire de ξ^2_1, ξ^3_1, ξ^5_1 on note b_2 la matrice obtenue en rayant alors dans a la 4ème ligne et la 4ème colonne.

b_2 est présymétrique

Preuve.

La dimension réduite de b_2 est 9 ; de plus b_2 est uniformément diagonalisable en adaptant le lemme 1.1. Il résulte alors du théorème 0 que b_2 est présymétrique.

Lemme 2.6.

$c^{2k}_{5\ell} = 0,\ (k,\ell) \neq (2,5),\ (k,\ell) \neq (1,4)$;

$c^{3k}_{5\ell} = 0,\ (k,\ell) \neq (3,5),\ (k,\ell) \neq (1,4)$;

$$c^{11}_{52} = \frac{c^{14}_{55}}{c^4_5} c^{41}_{52},\ c^{11}_{53} = \frac{c^{14}_{55}}{c^4_5} c^{41}_{53},\ c^{12}_{53} = c^{12}_{55} = c^{13}_{55} = 0\ ;\ c^{21}_{35} = 0,$$

$$c^{11}_{35} = \frac{c^{14}_{35}}{c^4_5} c^{41}_{55},\ c^{12}_{35} = c^{13}_{35} = 0\ ;\ c^{11}_{25} = \frac{c^{14}_{25}}{c^4_5} c^{41}_{55},\ c^{12}_{25} = c^{13}_{25} = 0.$$

Preuve.

Il existe H telle que :

$$b_2(\xi)\, H = H\, {}^t b_2(\xi).$$

L'élément de la 3ème ligne, 2ème colonne s'écrit :

$$\xi_1^3 h_{12} + \xi_2^3 h_{22} + \psi_3 h_{23} + h_{24}\left[c_5^3\ \xi_3^5 + c_{52}^{31}\ \xi_2^1 + c_{53}^{31}\ \xi_3^1 + c_{55}^{31}\ \xi_1^5\right]$$

$$= h_{13}\ \xi_1^2 + h_3\left(c_3^2\ \xi_2^3 + c_{35}^{21}\ \xi_5^1\right) + h_{23}\psi_2 + h_{34}\left(c_5^2\ \xi_2^5 + c_{52}^{21}\ \xi_1^2 + c_{53}^{21}\ \xi_1^3 + c_{55}^{21}\ \xi_1^5\right)$$

D'où : $h_{23} = 0$ et comme $c_5^3 \neq 0$, $c_5^2 \neq 0$: $h_{24} = h_{34} = 0$; on a alors : $h_{12} = h_{13} = 0$ et : $c_{35}^{21} = 0$.

L'élément de la 4ème ligne, 1ère colonne implique :

$$[(c_{12} \neq c_{52}) \text{ ou } (c_{13} \neq c_{53})] \Rightarrow h_{14} = 0.$$

• Si $c_{12} \neq c_{52}$ ou $c_{13} \neq c_{53}$, H est diagonale ; en explicitant les (4ème ligne, 3ème colonne), (4ème ligne, 2ème colonne), (4ème ligne, 1ère colonne), (3ème ligne, 2ème colonne) et (2ème ligne, 1ère colonne), on obtient le résultat du lemme.

• Si $c_{12} = c_{52}$ ou $c_{13} = c_{53}$,, tous les éléments non diagonaux de H sont nuls, sauf h_{14}. On explicite dans ces conditions les égalités correspondant aux éléments considérés dans le cas précédent.

On remplace la matrice de $a(\xi)$ par :

$$\left(I + \frac{h_{14}}{h_4} e_4^1\right)^{-1} \left(a(\xi)\right)\left(I + \frac{h_{14}}{h_4} e_4^1\right) ;$$

compte tenu des relations obtenues, on obtient les mêmes résultats que dans le cas $h_{14} = 0$.

Lemme 2.7.

On pose : $\xi_2^3 = \xi_2^4 = \xi_2^5 = 0$, $c_2^1\ \xi_1^2 + \dfrac{c_{25}^{14}}{c_5^4} c_{55}^{41}\ \xi_1^5 + c_{25}^{14}\ \xi_4^5 = 0$; comme $c_2^1 \neq 0$, on exprime ξ_1^2 comme fonction linéaire de $\left(\xi_1^5, \xi_4^5\right)$, on note b_3 la matrice obtenue en rayant alors dans $\mathfrak{a}$ la 2ème ligne et la 2ème colonne.

b_3 est présymétrique.

Lemme 2.8.

$c_{53}^{41}=c_{54}^{41}=0$; $c_{54}^{31}=0$; $c_{53}^{11}=c_{54}^{11}=c_{54}^{13}=0$; $c_{45}^{31}=0$;

$c_{45}^{11}=c_{45}^{13}=c_{45}^{14}=0$; $c_{35}^{14}=0$.

Preuve.

Il existe H telle que :

$$b_3(\xi)H = H\,{}^t b_3(\xi).$$

On explicite l'élément de : (3ème ligne, 2ème colonne) :

$$\xi_1^4\ h_{12}+\xi_3^4\ h_2+\left(c_5^4\ \ \xi_4^5+c_{52}^{41}\ \ \xi_1^2+c_{53}^{41}\ \ \xi_1^3+c_{54}^{41}\ \ \xi_1^4+c_{55}^{41}\ \ \xi_1^5\right)h_{24}$$
$$=h_{13}\ \ \xi_1^3+h_{23}\ \ \psi_3+h_3\left(c_4^3\ \ \xi_3^4+c_{45}^{31}\ \ \xi_1^5\right)+h_{34}\left(c_5^3\ \ \xi_3^5+c_{54}^{31}\ \ \xi_1^4\right).$$

On obtient : $h_{23}=0$ et comme $c_5^3\neq 0$; $h_{34}=0$. On explicite l'élément de (4ème ligne, 3ème colonne) :

$$\xi_1^5\ h_{13}+\xi_4^5\ h_3=h_{14}\ \ \xi_1^4+h_{24}\ \ \xi_3^4+h_4\left(c_5^4\ \ \xi_4^5+c_{52}^{41}\ \ \xi_1^2+c_{53}^{41}\ \ \xi_1^3+c_{54}^{41}\ \ \xi_1^4+c_{22}^{41}\ \ \xi_1^5\right)$$

On obtient : $h_{24}=0$; d'où en revenant à l'égalité précédente : $h_{12}=h_{13}=0$.

On explicite l'élément de (4ème ligne, 2ème colonne) :

$$\xi_3^5\ h_2=h_{14}\ \ \xi_1^3+h_4\left(c_5^3\ \ \xi_3^5+c_{54}^{31}\ \ \xi_1^4\right).$$

On obtient : $h_{14}=0$ et H est diagonale.

En explicitant ainsi les éléments des (4ème ligne, 1ère colonne), (3ème ligne, 1ère colonne) et (2ème ligne, 1ère colonne), on obtient le résultat du lemme.

Lemme 2.9.

on pose : $\xi_1^3=\xi_2^3=\xi_3^4=\xi_3^5=0$; on note b_4 la matrice obtenue en rayant alors la 3ème ligne et 3ème colonne.

b_4 est présymétrique.

Lemme 2.10.

$c_{52}^{41}=c_{55}^{41}=0$; $c_{54}^{21}=0$; $c_{45}^{21}=0$; $c_{52}^{11}=c_{55}^{14}=c_{54}^{12}=0$; $c_{45}^{12}=0$; $c_{25}^{14}=0$; $c_5^1=c_4^1c_5^4$.

Preuve.

En explicitant l'élément de (3$^{\text{ème}}$ ligne, 2$^{\text{ème}}$ colonne) de $b_4(\xi)H = H\,{}^t b_4(\xi)$, on obtient :

$$h_{23}= h_{34} = h_{24} = h_{12} = h_{13}= 0$$

et en explicitant l'élément de (4$^{\text{ème}}$ ligne, 2$^{\text{ème}}$ colonne) :

$$h_{14}= 0.$$

H est donc diagonale ; on en déduit aisément le résultat.

Lemme 2.11.

$\mathfrak{a}(\xi)$ est présymétrique

Preuve.

On transforme la matrice de $\mathfrak{a}(\xi)$ par similarité par la matrice diagonale :

$$D=\left(1,\frac{1}{\sqrt{c_2^1}},\frac{1}{\sqrt{c_3^1}},\frac{1}{\sqrt{c_4^1}},\frac{1}{\sqrt{c_5^1}}\right);$$

la matrice

$$D^{-1}\,\mathfrak{a}(\xi)\,D$$

est symétrique.

§ III – Etude du cas II.

Grâce à l'hypothèse de diagonalisabilité, nous verrons à la fin du paragraphe III que l'on est ramené à l'étude de deux sous-cas. (m = 5) i)

$$\mathfrak{a}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_o + \psi_1(\xi'', \psi_2, \psi_3, \psi_4) & & & \phi^i_j(\xi'') & \\ & \xi_o + \psi_2 & & & \\ & \phi^3_2(\xi'') & \xi_o + \psi_3 & & \\ \xi^i_j & & & \xi_o + \psi_4 & \\ & & & & \xi_o \end{pmatrix}$$

$\left\{\xi^i_j \middle| (i,j) \neq (3,2)\right\}$ et ψ_2, ψ_3, ψ_4, ξ_o sont des coordonnées indépendantes ; $\xi'' = (\ldots, \xi^i_j, \ldots)$, $i > j$, $(i,j) \neq (3,2)$ ou :

ii)

$$\mathfrak{a}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_o + \psi_1(\xi'', \psi_2, \psi_3, \psi_4) & & & \phi^i_j(\xi'') & \\ \phi^2_1(\xi^3_1, \xi^4_1, \xi^5_1) & \xi_o + \psi_2 & & & \\ & & \xi_o + \psi_3 & & \\ \xi^i_j & & & \xi_o + \psi_4 & \\ & & & & \xi_o \end{pmatrix}$$

$\left\{\xi^i_j \middle| (i,j) \neq (2,1)\right\}$ et ψ_2, ψ_3, ψ_4, ξ_o sont des coordonnées indépendantes ; $\xi''(\ldots, \xi^i_j, \ldots)$, $i > j$, $(i,j) \neq (2,1)$; ϕ^2_1 dépend seulement de $\xi^3_1, \xi^4_1, \xi^5_1$.

Dans les 2 sous-cas, on note :

$$\psi_1(\xi'', \psi_2, \psi_3, \psi_4) = \sum_{2 \le k \le 4} c_{1k}\psi_k + \sum_{k > \ell} c^k_{1k}\xi^k_\ell$$

Nous étudions d'abord le cas II_i.

Lemme 3.1.

On pose : $\xi^5_1 = \xi^5_2 = \xi^5_3 = \xi^5_4 = 0$; on note b la matrice $= \left\{\phi^i_j \middle| 1 \le i, j \le 4\right\}$.

b est présymétrique.

Preuve.

La dimension réduite de b est 8 ; de plus b est uniformément diagonalisable d'après le lemme 1.1 ; il résulte alors du théorème 0 que b est présymétrique.

Lemme 3.2.

$c_{j\ell}^{ik} = 0$, pour $1 \le i < 4$ et $i < j \le 4$, $(i,j) \ne (2,3)$, $1 \le k < \ell \le 4$, $(k,\ell) \ne (i,j)$ et $(k,\ell) \ne (2,3)$

$$c_{3\ell}^{2k} = k_3^2 \; c_{2\ell}^{3k} \text{ pour } 1 \le k < \ell \le 4,\ (k,\ell) \ne (2,3)$$

$c_4^1 = c_2^1 \; c_4^2$, $c_4^2 = k_3^2 \; c_4^3$, $c_3^1 = c_2^1 \; k_3^2$, $c_j^i > 0$, $k_3^2 > 0$.

Preuve.

Il existe H définie positive symétrique telle que :

$$b(\xi)H = H\,{}^t b(\xi).$$

On considère les éléments des (4ème ligne, 3ème colonne), (4ème ligne, 2ème colonne, (3ème ligne, 2ème colonne) ; on obtient

$$h_{34} = h_{24} = h_{23} = 0.$$

On considère les éléments des (4ème ligne, 1ère colonne), (3ème ligne, 1ère colonne) ; on obtient d'abord les résultats suivants :

Si $c_{14} \ne 1$ ou $c_{12} \ne 0$ ou $c_{13} \ne 0$, on a : $h_{14} = 0$;

Si $c_{13} \ne 1$ ou $c_{12} \ne 0$ ou $c_{14} \ne 0$, on a : $h_{13} = 0$;

Si $c_{12} \ne 1$ ou $c_{13} \ne 0$ ou $c_{14} \ne 0$, on a : $h_{12} = 0$.

Supposons d'abord les 3 conditions vérifiées, H est alors diagonale. On obtient en explicitant complètement les éléments ci-dessus le résultat du lemme. Si $c_{14} = 1$,

$c_{12} = c_{13} = 0$, on a :

$h_{12} = h_{13} = 0$; on explicite les éléments, comme précédemment et on obtient des relations où figure h_{14}.

On transforme la matrice de $\mathfrak{a}$ par la matrice inversible : $I + \dfrac{h_{14}}{h_4} e_4^1$. Compte tenu des relations obtenues, on obtient le résultat du lemme.

Les 2 autres possibilités se traitent de la même façon.

Lemme 3.3.

On pose : $\xi_1^2 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = \xi_1^5 = 0$; on note b_1 la matrice obtenue en rayant la 1ère colonne et la 1ère ligne de $\mathfrak{a}$. On obtient

b_1 est présymétrique.

Lemme 3.4.

$c_{j\ell}^{ik} = 0$ pour : $2 \le i < 5$ et $i < j \le 5$, $(i,j) \ne (2,3)$, $2 \le k < \ell \le 5$, $(k,\ell) \ne (i,j)$.

$c_{35}^{2k} = k_3^2\ c_{25}^{3k}$ pour $2 \le k \le 4$, $c_5^3 = c_4^3\ c_5^4$, $c_5^2 = c_4^2\ c_5^4$, $c_j^i > 0$.

Preuve.

Il existe H telle que :

$$b_1(\xi)H = H\,{}^t b_1(\xi)\ ;$$

on explicite ; on obtient que H est diagonale et on déduit le lemme.

Lemme 3.5.

$c_{52}^{41} = c_{53}^{41} = c_{54}^{31} = c_{54}^{21} = 0.$

Preuve.

On pose : $\xi_j^i = 0$, pour $(i,j) \ne (2,1)$ et $\xi_1^2 = 1$. Pour $\psi_4 = 0$, $\xi_o = 0$ est une valeur propre double de la matrice 5×5 diagonalisable obtenue ; on en déduit que le mineur 4×4 de valeur :

$$c_{52}^{41}\text{dét}\begin{pmatrix} \psi_1(\ ) & c_2^1 & 0 \\ 1 & \psi_2 & k_3^2\ c_{22}^{31} \\ 0 & c_{32}^{21} & \psi_3 \end{pmatrix}$$

est identiquement nul ; le déterminant (3×3) n'est pas identiquement nul, d'où le résultat. Pour le deuxième coefficient, on procède de même, en posant : $\xi_j^i = 0$ pour $(i,j) \neq (3,1)$ et $\xi_1^3 = 1$. Pour les deux derniers, on pose : $\xi_j^i = 0$, pour $(i,j) \neq (4,1)$ et $\xi_1^4 = 1$. $\xi_o = 0$ est valeur propre double, en choisissant ψ_3 tel que : $\psi_2\psi_3 - k_3^2\left(c_{24}^{31}\right)^2 = 0$; on en déduit que le mineur 4×4 :

$$\text{dét}\begin{pmatrix} c_{12}\psi_2 + c_{13}\psi_3 + c_{14}\psi_4 + c_{14}^1 & 0 & c_4^1 & c_{54}^{11} \\ 0 & \psi_2 & 0 & c_{51}^{21} \\ 0 & c_{24}^{31} & 0 & c_{54}^{31} \\ 1 & 0 & \psi_4 & c_{54}^{41} \end{pmatrix}$$

est identiquement nul ; on explicite : si $c_{24}^{31} \neq 0$, on obtient le résultat. Si $c_{24}^{31} = 0$, on pose : $\psi_2 = \psi_3 = 0$ et ξ_o est valeur propre triple, les mineurs correspondants d'ordre 3 sont identiquement nuls, d'où le résultat.

Lemme 3.6.

On pose : $\xi_1^4 = \xi_2^4 = \xi_3^4 = 0$, $c_5^4 \ \xi_4^5 + c_{55}^{41} \ \xi_1^5 = 0$; on note b_2 la matrice obtenue en rayant la 4ème ligne et la 4ème colonne de $\mathfrak{a}$. On obtient : b_2 est présymétrique.

Lemme 3.7.

$c_{52}^{31} = c_{53}^{31} = c_{55}^{31} = 0$; $c_{52}^{21} = c_{53}^{21} = c_{55}^{21} = 0$; $c_{52}^{11} = c_{53}^{11} = c_{55}^{12} = c_{55}^{13} = 0$;

$c_{35}^{21} = k_3^2 \ c_{25}^{31}$; $c_{35}^{12} = c_{35}^{13} = 0$; $c_{35}^{11} = \dfrac{c_{35}^{14}}{c_5^4} \ c_{55}^{41}$; $c_{25}^{12} = c_{25}^{13} = 0$;

$c_{25}^{11} = \dfrac{c_{25}^{14}}{c_5^4} \ c_{55}^{41}$.

Preuve.

Il existe H définie positive telle que :

$$b(\xi)H = H\,{}^t b(\xi).$$

On considère les éléments des (4ème colonne, 3ème ligne), (4ème colonne, 2ème ligne), (3ème colonne, 2ème ligne) ; on obtient, d'abord :

$$h_{23} = h_{24} = h_{23} = 0 \ ; \ \frac{h_2}{h_3} = k_3^2 \text{ , d'où :}$$

$$h_{12} = h_{13} = 0.$$

On considère l'élément de (4ème ligne, 1ère colonne).

Si c_{12} ou c_{13} ou $c_{14} \neq 0$, on obtient : $h_{14} = 0$ et H est diagonale ; on en déduit le résultat du lemme.

Si $c_{12} = c_{13} = c_{14} = 0$, on transforme la matrice de $\mathfrak{a}$ par la matrice inversible :

$$I + \frac{h_{14}}{h_{14}}\ e_4^1.$$

Compte tenu des relations obtenues, on obtient à nouveau le résultat du lemme.

Lemme 3.8.

$c_{45}^{12} = c_{45}^{13} = c_{54}^{12} = c_{54}^{13} = 0.$

Preuve.

Montrons que : $c_{45}^{12} = 0$. Si $c_{14} \neq 1$ (resp. $c_{13} \neq 0$), (resp. $c_{12} \neq 0$). On pose : $\xi_1^2 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = \xi_1^5 = \xi_2^4 = \xi_3^4 = \xi_3^5 = 0$. $\xi o = -\psi_4$ est zéro double de dét $\mathfrak{a}(\xi)$ si : $(c_{14}-1)\psi_4 + c_{13}\psi_3 + c_{12}\,\psi_2 + c_{15}^2 = 0$. On remplace ψ_4 (resp. ψ_3)(resp. ψ_2), par sa valeur et on écrit que le mineur d'ordre 4 obtenu en rayant la 3ème ligne et la 1ère colonne est nul (identiquement par rapport aux variables indépendantes) on obtient une identité de la forme :

$$c_{45}^{12}\ \xi_2^5.\ \text{Polynômes (variables indépendantes)} = 0$$

on vérifie que le polynôme n'est pas identiquement nul et on obtient le résultat.

Si $c_{14} = c_{13} = c_{12} = 0$, on pose : $\xi_1^3 = \xi_1^4 = \xi_1^5 = \xi_2^4 = \xi_3^4 = \xi_3^5 = 0$. $\xi_o = -\psi_4$ est zéro double si le déterminant obtenu en rayant la 3ème ligne et la 3ème colonne est nul :

$$\text{dét}\begin{pmatrix} c_{15}^{2}\ \xi_1^5 + c_{12}^{1}\ \xi_1^2 & c_2^1\ \xi_1^2 & 0 & 0 \\ \xi_1^2 & \psi_2 - \psi_4 & k_3^2\left(c_{25}^{35}\ \xi_2^5 + c_{22}^{31}\ \xi_1^2\right) & c_5^2\ \xi_2^5 \\ 0 & c_{25}^{32}\ \xi_2^5 + c_{22}^{31}\ \xi_1^2 & \psi_3 - \psi_4 & 0 \\ 0 & \xi_2^5 & 0 & -\psi_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Si $c_{15}^2 \neq 0$ ou $c_{12}^1 \neq 0$, on exprime ψ_2 en fonction de ψ_3, ψ_4, ξ_2^5, ξ_1^2. On écrit que le mineur de $\mathfrak{a}(\xi)$ obtenu en rayant la 3ème ligne et la 2ème colonne est nul et on obtient :

$$c_{45}^{12}\ \xi_2^5.\psi_4\left(\psi_3 - \psi_4\right)\xi_1^2 \equiv 0,$$

d'où le résultat.

Si $c_{15}^2 = c_{12}^1 = 0$, $\xi_0 = -\psi_4$ est zéro double, le mineur obtenu en rayant la 3ème ligne et la 1ère colonne est nul, d'où le résultat.

Les autres égalités du lemme se démontrent de la même façon.

Lemme 3.9.

On pose : $\xi_1^4 = \xi_1^5 = \xi_2^4 = \xi_2^5 = \xi_3^4 = \xi_3^5 = 0$. On note b_3 la matrice 3×3 obtenue en rayant les deux dernières lignes et colonnes de $\mathfrak{a}$.

Si $c_{25}^{34} \neq 0$, b_3 est présymétrique.

Preuve.

Du fait du lemme 1.2, b_3 est diagonalisable ; de plus, si $c_{25}^{34} \neq 0$, sa dimension réduite est au moins 5, d'où le résultat.

Lemme 3.10.

$c_{25}^{14} = c_{35}^{14} = 0.$

Preuve.

Si $c_{25}^{34} = 0$, le résultat est évident car les élément au-dessus de la diagonale, dépendent linéairement de ceux au-dessous.

Si $c_{25}^{34} \neq 0$, il existe H telle que :

$$b_3(\xi)H = H\,{}^t b_3(\xi).$$

On considère l'élément de la 3ème ligne, 2ème colonne :

$$\xi_1^3 h_{12} + \left(c_{22}^{31}\ \xi_1^2 + c_{23}^{31}\ \xi_1^3 + c_{25}^{34}\ \xi_4^5\right)h_{22} + \psi_3 h_{23}$$
$$= \xi_1^2\ h_{13} + \psi_2 h_{23} + k_3^2 h_{33}\left(c_{22}^{31}\ \xi_1^2 + c_{23}^{31}\ \xi_1^3 + c_{25}^{34}\ \xi_4^5\right);$$

on obtient : $h_{22} = k_3^2 h_{33}$ et : $h_{23} = h_{12} = h_{13} = 0$; H est donc diagonale ; en considérant les éléments de la (3ème ligne, 1ère colonne) et (2ème ligne, 1ère colonne), on obtient le résultat.

Lemme 3.11.

On pose $\xi_1^2 = \xi_1^3 = \xi_2^4 = \xi_2^5 = \xi_3^4 = \xi_3^5 = 0$. Il apparaît la matrice :

$$b_4(\xi) = \begin{pmatrix} \varphi_o + \psi_1[\ ]c_4^1\ \xi_1^4 + c_{45}^{11}\ \xi_1^5 + c_{45}^{14}\ \xi_4^5 & c_5^1\ \xi_1^5 + c_{55}^{14}\ \xi_4^5 + c_{54}^{11}\ \xi_1^4 \\ \xi_1^4 \quad\quad \xi_o + \psi_4 & c_5^4\ \xi_4^5 + c_{55}^{41}\ \xi_1^5 + c_{54}^{41}\ \xi_1^4 \\ \xi_1^5 \quad\quad \xi_4^5 & \xi_o \end{pmatrix}.$$

On obtient : b_4 présymétrique.

Preuve.

Par le lemme 2, b_4 est diagonalisable ; de plus sa dimension réduite est supérieure ou égal à 5 ; elle est donc présymétrique.

Lemme 3.12.

$c_{45}^{11} = c_{45}^{14} = c_{54}^{11} = c_{55}^{14} = c_{54}^{41} = c_{55}^{41} = 0$; $c_5^1 = c_3^1\ c_5^3$.

Preuve.

On a une matrice H telle que :

$$b_4(\xi)H = H\,{}^t b_4(\xi).$$

Si $c_{14} \neq 0$ et $c_{14} \neq 1$, on vérifie que H est diagonale, d'où on obtient le résultat.

Si $c_{14} = 1$, on a : $h_{23} = h_{13} = 0$. On transforme $\mathfrak{a}(\xi)$ par la matrice inversible :

$$I + \frac{h_{12}}{h_2} e_4^1$$

et on retrouve le résultat précédent.

Si $c_{14} = 0$, on a : $h_{23} = h_{12} = O$. On transforme $\mathfrak{a}(\xi)$ par la matrice inversible :

$$I - \frac{h_{13}}{h_3} e_4^1$$

et on retrouve le résultat précédent.

Lemme 3.13.

On pose : $\xi_1^2 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = \xi_2^5 = \xi_3^5 = \xi_4^5 = 0$. Il apparaît la matrice :

$$b_5(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_o + \psi_2 & k\xi_3^2\left(c_{24}^{32}\ \xi_2^4 + \xi_{24}^{33}\ \xi_5^4 + c_{25}^{31}\ \xi_1^5\right) & c_4^2\ \xi_2^4 + c_{45}^{21}\ \xi_1^5 \\ c_{24}^{32}\ \xi_2^4 + c_{24}^{33}\ \xi_3^4 + c_{25}^{31}\ \xi_1^5 & \xi_o + \psi_3 & c_4^3\ \xi_3^4 + c_{45}^{31}\ \xi_1^5 \\ \xi_2^4 & \xi_3^4 & \xi_o + \psi_4 \end{pmatrix}$$

$b_5(\xi)$ est présymétrique.

Preuve.

b_5 est évidemment diagonalisable ; de plus sa dimension réduite est au moins 5, elle est donc présymétrique.

Lemme 3.14.

$c_{45}^{21} = c_{45}^{31} = 0.$

Preuve.

On a H telle que :

$$b_5(\xi)H = H\,{}^t b_5(\xi)$$

On vérifie que H est diagonale et on obtient facilement le résultat.

Lemme 3.15..

$\mathfrak{a}(\xi)$ est pré symétrique.

Preuve.

Elle est analogue à celle du lemme 3.11 ; on a encore :

$$D=\left(1,\frac{1}{\sqrt{c_2^1}},\frac{1}{\sqrt{c_3^1}},\frac{1}{\sqrt{c_4^1}},\frac{1}{\sqrt{c_5^1}}\right).$$

On considère maintenant le cas II_{ii}. Ce cas étant très analogue au précédent, nous le décrivons plus brièvement.

Lemme 3.16.

On pose : $\xi_1^3=\xi_1^4=\xi_1^5=0$; on note b la matrice : $b=\left\{\phi_j^i|2\le i,j\le 5\right\}$.

b est présymétrique.

Lemme 3.17.

$c_{j\ell}^{ik}=0$ pour $2\le i<5$ et $i<j\le 5$, $2\le k<\ell\le 5$, $(k,\ell)\ne(i,j)$; $c_j^i=c_k^i\ c_j^k$, pour $i<k<j$; $c_j^i>0$.

Lemme 3.18.

On pose $\xi_1^5=\xi_2^5=\xi_3^5=\xi_4^5=0$; on note b_1 la matrice : $b_1=\left\{\phi_j^i|1\le i,j\le 4\right\}$.

b_1 est présymétrique.

Lemme 3.19.

$c_{j\ell}^{ik}=0$, pour $1\le i,j\le 4$, $(i,j)\ne(1,2)$, $1\le k<\ell\le 4$, $(k,\ell)\ne(i,j)$, $(k,\ell)\ne(1,2)$

$c_{23}^{12}=c_{24}^{12}=c_{24}^{13}=0$; $c_{23}^{11}=k_2^1\ c_{13}^{21}$, $c_{24}^{11}=k_2^1\ c_{14}^{21}$; $c_4^i=c_3^i\ c_4^3$ pour $1\le i\le 2$; $c_3^1=k_2^1\ c_3^2$.

Preuve.

Si $c_{12} \neq 0$ ou $c_{13} \neq 0$ ou $c_{14} \neq 1$ (resp. $c_{12} \neq 0$ ou $c_{14} \neq 0$ ou $c_{13} \neq 1$) (resp. $c_{13} \neq 0$ ou $c_{14} \neq 0$ ou $c_{12} \neq 1$), on obtient un symétriseur H diagonal et le résultat.

Si $c_{12} = c_{13} = 0$ et $c_{14} = 1$, on transforme $\mathfrak{a}$ par :

$$I + \frac{h_{14}}{h_4} e_4^1$$

et on obtient les même résultats.

Les 2 autres cas se traitent de même.

Lemme 3.20.

$c_{54}^{31} = c_{53}^{41} = 0.$

La preuve est analogue à celle du lemme 3.5.

Lemme 3.21.

On pose : $\xi_1^4 = \xi_2^4 = \xi_3^4 = 0$, $c_5^4 \ \xi_4^5 + c_{55}^{41} \ \xi_1^5 = 0$. La matrice b_2 obtenue en rayant la 3ème ligne et la 3ème colonne est présymétrique.

Lemme 3.22.

$c_{53}^{31} = c_{55}^{31} = c_{53}^{21} = c_{55}^{21} = c_{35}^{21} = c_{53}^{11} = c_{53}^{12} = c_{55}^{12} = c_{55}^{13} = c_{35}^{12} = c_{35}^{13} = 0$;

$c_{35}^{11} = \dfrac{c_{35}^{14}}{c_5^4} \ c_{55}^{41}$; $c_5^1 = c_3^1 \ c_5^3 + \dfrac{c_{55}^{14}}{c_5^4} \ c_{55}^{41}$; $c_{25}^{11} = k_2^1 \ c_{15}^{21}$.

Preuve.

On obtient dans tous les cas une matrice H diagonale d'où le résultat.

Lemme 3.23.

$c_{45}^{12} = c_{45}^{13} = c_{54}^{12} = c_{54}^{13} = 0$. La preuve est celle du lemme 3.8 dans un cas particulier.

Lemme 3.24.

On pose : $\xi_1^4 = \xi_1^5 = \xi_2^4 = \xi_2^5 = \xi_3^4 = \xi_3^5 = 0$. On note b_3 la matrice 3×3 obtenue en rayant les 2 dernières lignes et colonnes de $\mathfrak{a}$.

b_3 est diagonalisable (lemme 1.2).

Lemme 3.25.

$c_{35}^{14} = c_{35}^{11} = 0.$

Preuve.

Résulte immédiatement de la diagonalisabilité de b_3 et du lemme 3.22.

Lemme 3.26.

On pose : $\xi_1^3 = \xi_2^3 = \xi_3^4 = \xi_3^5 = 0$. La matrice b_4 obtenue en rayant la 3ème ligne et la 3ème colonne de $\mathfrak{a}$ est présymétrique.

Lemme 3.27.

$c_{54}^{41} = c_{55}^{41} = c_{54}^{21} = c_{45}^{21} = c_{54}^{11} = c_{55}^{14} = c_{45}^{11} = c_{45}^{14} = 0$; $c_5^1 = c_3^1 \;\; c_5^3.$

Preuve.

Dans tous les cas H est diagonale, d'où le résultat.

Lemme 3.28.

$c_{45}^{31} = 0.$

Preuve.

On pose : $\xi_1^3 = \xi_1^4 = \xi_2^3 = \xi_2^5 = \xi_3^4 = \xi_3^5 = \xi_4^5 = 0$; $\xi_1^5 = 1$; $\psi_3 = \psi_4$; $\xi_o = -\psi_3$ est zéro double de dét$\mathfrak{a}$; les mineurs correspondant d'ordre 4 sont nuls et on a :

$$c_{45}^{31} \cdot \begin{vmatrix} c_{12}\psi_2 + (c_{13}+c_{14}-1)\psi_3 + c_{15}^1 & k_2^1\ c_{15}^{21} & c_5^1 \\ c_{15}^{21} & \psi_2 - \psi_3 & 0 \\ 1 & 0 & -\psi_3 \end{vmatrix} \equiv 0\ ;$$

d'où le résultat.

Lemme 3.29

$\mathfrak{a}(\xi)$ est présymétrique.

On va montrer que l'on peut ramener les sous-cas du cas II aux sous-cas $\mathrm{II_i}$ et $\mathrm{II_{ii}}$. Par échange de lignes et colonnes, on peut toujours supposer que les deux formes dépendantes sont :

$$\phi_1^1(\xi) = \xi_o + \psi_1(\xi'', \psi_2, \psi_3, \psi_4) \text{ et } \phi_\ell^k(\xi''),\ k > \ell\ ;$$

$$\xi'' = \left\{\xi_j^i \middle| (i,j) \neq (k,\ell),\ i > j\right\}.$$

Le cas $(k,\ell) = (3,2)$ est le cas $\mathrm{II_i}$.

Lemme 3.30.

Dans le cas $(k,\ell) = (4,2)$, $\mathfrak{a}(\xi)$ est présymétrique.

Preuve.

Si $c_{23}^{42} \neq 0$, par changement de variable indépendante

$$\phi_2^4(\xi) = \xi_2^{4'},\ \xi_2^3 = \phi_2'^3(\xi') = \frac{\xi_2^{4'}}{c_{23}^{42}} + \ldots$$

on se ramène au cas précédent.

Si $c_{23}^{42} = 0$, on montre d'abord que $c_4^3 \neq 0$; on procède comme au lemme 3.3 et on obtient aisément le résultat.

Enfin on échange la 4$^{\text{ème}}$ ligne et la 3$^{\text{ème}}$ ligne de $\mathfrak{a}$ ainsi que la 4$^{\text{ème}}$ colonne et la 3$^{\text{ème}}$ colonne ; comme $c_4^3 \neq 0$, on se ramène au cas $\mathrm{II_i}$, d'où le résultat.

Lemme 3.31.

Dans le cas $(k,\ell) = (5,2)$, $\mathfrak{a}(\xi)$ est présymétrique.

Preuve.

Si ϕ_2^5 dépend effectivement de ξ_2^3 ou ξ_2^4, on se ramène à un des cas précédents. Sinon, on montre que : $c_5^4 \neq 0$, on échange la 4ème et 5ème ligne et la 4ème et 5ème colonne et on se ramène au cas du lemme 3.0.

Lemme 3.32.

Dans le cas $(k,\ell) = (5,3)$, $\mathfrak{a}(\xi)$ est présymétrique.

Preuve.

Si ϕ_3^5 dépend effectivement de ξ_2^3 ou ξ_2^4 ou ξ_2^5, on se ramène à un cas précédent. Sinon, on échange la 2ème et la 3ème ligne ainsi que la 2ème et 3ème colonne et on se ramène au cas précédent.

Lemme 3.33.

Dans le cas $(k,\ell) = (4,3)$, $\mathfrak{a}(\xi)$ est présymétrique.

Preuve analogue ; on échange les 4ème et 5ème lignes et colonnes.

Lemme 3.34.

Dans le cas $(k,\ell) = (5,4)$, $\mathfrak{a}(\xi)$ est présymétrique.

Preuve analogue ; en échangeant les 3ème et 4ème lignes et colonnes.

Lemme 3.35.

Dans le cas $(k,\ell) = (2,1)$, $\mathfrak{a}(\xi)$ est présymétrique.

Preuve.

Si ϕ_1^2 dépend effectivement de ξ_2^3 ou ξ_2^4 ou ξ_2^5 ou ξ_3^4 ou ξ_3^5 ou ξ_4^5, on se ramène à un des cas précédents. Sinon on a : $\phi_1^2(\xi) = \phi_1^2\left(\xi_1^3, \xi_1^4, \xi_1^5\right)$ et on est dans le cas II_{ii} déjà considéré.

Lemme 3.36.

Dans le cas $(k,\ell) = (3,1)$, $\mathfrak{a}(\xi)$ est présymétrique.

Preuve.

Si ϕ_1^3 dépend de ξ_1^2, on se ramène au cas précédent. Sinon, on a $\phi_1^3\left(\xi_1^4, \xi_1^5\right)$, on échange les 2ème et 3ème lignes et colonnes et on se ramène au cas précédent.

Lemme 3.37.

Dans le cas $(k,\ell) = (4,1)$, $\mathfrak{a}(\xi)$ est présymétrique.

Preuve analogue.

Lemme 3.38.

Dans le cas $(k,\ell) = (5,1)$, $\mathfrak{a}(\xi)$ est présymétrique.

Preuve.

On se ramène à : $\phi_1^5(\xi) \equiv 0$. On échange les 4ème et 5ème ligne et 4ème et 5ème colonnes et on se ramène au cas précédent.

Le cas II est donc terminé.

Références

[1] Tatsuo Nishitani, Symmetrization of hyperbolic systems with real constant

coefficients, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 21 (1994), n° 1, 97-130.

[2] Tatsuo Nishitani and Jean Vaillant, Smoothly symmetrizable systems and the reduced dimension, Tsukuba J. Math. 25 (2001), n° 1, 165-177.

[3] Yorimasa Oshime, canonical forms of 3×3 strongly hyperbolic systems with real constant coefficients, J. Math. Kyoto Univ. 31 (1991), n° 4, 937-982.

[4] G. Strang, On strong hyperbolicity. J. Math. Kyoto. Univ. 6 (1967), 397-417.

[5] Jean Vaillant, Symétrisabilité des matrices localisées d'une matrice fortement hyperbolique en un point multiple, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 5 (1978), n° 2, 405-427.

[6] Jean Vaillant, Systèmes fortement hyperboliques 4×4, dimension réduite et symétrie, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 29 (2000), n° 4, 839-890.

[7] Jean Vaillant, Strongly hyperbolic real systems, reduced dimension and symmetry II, à paraître dans Colloque Equations aux Dérivées Partielles et Physique Mathématique, à la Mémoire de Jean Leray, Tokyo 2001, Birkhauser.

Jean VAILLANT, Maison de la Pédagogie, B.C. 172.
Maths, Université de PARIS 6, 4, Place Jussieu
75252 PARIS Cedex 05 FRANCE