Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 69, 6, 2000, pp. 339-386

COLLOCATION A PAS VARIABLES POUR LE POTENTIEL DE SIMPLE COUCHE DANS UN POLYGONE

O.R. FAURE

A GRADED COLLOCATION METHOD FOR FIRST KIND BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS ON POLYGONS

ABSTRACT

We present a collocation method using smoothest splines on graded meshes for the first kind boundary integral equations on a polygon.
It has an optimal order of convergence in L^2 norms.

Keywords: collocation methods, integral equations, spline approximation.
MSC (2000): 65N35, 65R20, 41A15.

RESUME

On propose une méthode de collocation utilisant des splines réguliers sur un découpage non uniforme pour résoudre une équation intégrale frontière à noyau logarithmique sur un polygone.
On donne des estimations d'erreur d'ordre optimum en norme L^2.

Mots-clés: méthodes de collocation, équations intégrales, approximation par fonctions splines.
MSC (2000): 65N35, 65R20, 41A15.

1. INTRODUCTION

Les méthodes de collocation constituent des techniques numériques de résolution d'équations aux dérivées partielles. Elles sont souvent utilisées dans les problèmes pratiques à cause de leur facilité d'implémentation, en particulier dans le cadre des éléments finis pour les équations intégrales frontières.

Un exemple est l'application de ces méthodes à des équations intégrales frontières du premier type à noyaux logarithmiques (équation intégrale de Symm) sur une courbe fermée Γ

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\log|x-\zeta|\;u(\zeta)\;d\Gamma(\zeta)=g(x),\qquad x\in\Gamma\subset\mathbb{R}^2. \tag{1.1}$$

Ce travail a été réalisé à l'aide du support du project FOMEC de l'Universidad Nacional del Litoral (Argentine)

Pour appliquer la méthode de collocation à cette équation, l'espace des fonctions test choisi habituellement est l'espace des B-splines et les points de collocation sont choisis de manière appropriée vis-à-vis du degré du spline.

Quand Γ est la frontière d'un domaine Ω simplement connexe et régulier, l'équation (1.1) entre dans le cadre de la théorie abstraite des opérateurs pseudodifférentiels.

Si Γ est une frontière polygonale, la théorie des opérateurs pseudodifférentiels n'est pas applicable. L'opérateur intégral n'a plus une partie principale convolutionnelle et la solution de l'équation intégrale présente des singularités aux sommets, même si le second membre g est régulier [10]. Dans ce cas, on se sert de la transformation de Mellin. Cette technique, utilisée par Elschner et Graham dans [7], Parenti et Lewis dans [21] est particulièrement bien adaptée à l'étude des propriétés d'indice et de Fredholm des potentiels de surface ainsi qu'à celle des opérateurs de noyaux (-1)-homogènes qu'ils engendrent.

Costabel et Stephan [4] démontrent l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (1.1) pour une frontière liptchitzienne qui entoure un ouvert connexe de capacité différente de 1.

L'existence et l'unicité des solutions de (1.1) a été analysée sans montrer l'ellipticité forte par Verchota [26] et Mc Lean [17]. Dans leurs travaux, Γ est un contour fermé lipschitzien. Dans des cas moins restrictifs (par exemple un arc ouvert), la méthode des intégrales d'énergie a été utilisée pour générer des estimations d'erreur pour la méthode de Galerkin.

Dans [7], Elschner et Graham choisissent une approche originale de résolution numérique: ils reformulent l'équation intégrale frontière en utilisant un paramètrage non linéaire du bord de l'ouvert de telle façon que la nouvelle équation possède des solutions plus régulières que (1.1). Laubin et Baiwir étudient dans [15] et [16] les propriétés d'extension dans des espaces de type Sobolev de l'opérateur frontière généré par le potentiel de double couche. Ils décrivent des méthodes de collocation qui utilisent explicitement les fonctions singulières et donnent lieu à des convergences d'ordre élevé pour des normes de Sobolev d'indice élevé.

L'objectif de notre travail est la construction de méthodes de collocation qui fournissent un ordre de convergence élevé en norme L^2 sans utiliser explicitement les solutions singulières mais en raffinant le maillage au voisinage des sommets. Dans ce cadre, nous évitons un inconvénient de la méthode de Elschner-Graham où les fonctions test ne sont des fonctions splines que dans un paramétrage non linéaire. Nos fonctions test sont de vrais splines par rapport à une subdivision non uniforme.

Nous analysons le potentiel de simple couche sur un polygone. Nous utilisons des résultats démontrés par Baiwir et Laubin dans [16].

En particulier, nous décrivons le comportement de la solution de l'équation (1.1). Nous décomposons la solution en deux parties: une première partie régulière et une seconde singulière dans un voisinage de chaque sommet, dont la singularité dépend de l'angle. Nous développons d'abord le problème réduit au cas d'un angle infini et nous concluons pour le cas d'un ouvert polygonal.

La section 3 présente une description de la méthode de collocation développée. Cette méthode consiste en une discrétisation de l'équation (1.1) sur le bord Γ de Ω par un découpage non uniforme adapté pour approcher des fonctions de la forme x^α. Nous paramétrons le bord de l'ouvert par une fonction $\sigma : [-\pi, \pi] \to \Gamma$ proportionnelle à la longueur d'arc et utilisons des fonctions splines dans ce paramétrage contrairement à [7].

Ensuite, nous montrons qu'il est possible d'approcher, au voisinage de 0 et par les splines considérés, une fonction du type x^α avec une précision du même ordre que celle généralement obtenue pour des fonctions ayant une régularité beaucoup plus élevée. Cette approximation est faite sur base d'un découpage non-uniforme de la forme $\Delta = \{x_\ell\}_{\ell=0}^N$, $x_\ell = (\ell/N)^q$ de l'intervalle $[0,1]$, où q dépend de l'exposant α. On démontre que pour des splines de degré $0, 1, 2$ et 3, la norme L^2 de l'erreur satisfait

$$\inf_{u_\Delta^{(k)}} \left\| x^\alpha - u_\Delta^{(k)} \right\|_{L^2} < C\, N^{-(k+1)}$$

où $u_\Delta^{(k)}$ est un spline de degré k subordonné au découpage Δ.

Pour étudier la convergence des approximations, nous avons utilisé une méthode légèrement modifiée qui remplace l'opérateur de simple couche sur Γ par un opérateur S plus régulier (l'opérateur de simple couche sur la boule unité) dans un voisinage de chaque sommet.

2. Le potentiel de simple couche sur un polygone

Soient Ω un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^2$ et Γ sa frontière. On désigne par $P_0, P_1, \ldots, P_M = P_0$ les sommets de Ω, par $\omega_j \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ la mesure de l'angle intérieur associé au sommet P_j et par Γ_j le segment joignant P_j à P_{j+1}. On a évidemment $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_{M-1}$.

On note encore ν_x le vecteur normal unitaire intérieur en tout point $x \in \Gamma$ qui n'est pas un sommet.

On pose

$$\sigma_j : [0, L_j] \to \mathbb{R}^2 : t \to P_j + \frac{t}{L_j}(P_{j+1} - P_j)$$

le paramétrage de Γ_j par la longueur d'arc.

Enfin, on baptise φ l'unique transformation conforme de $\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega}$ dans l'ensemble $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ telle que φ soit holomorphe au voisinage de l'infini et $\lim_{z\to\infty} D\varphi = 1/\gamma > 0$. Le nombre γ est la capacité de Γ.

Notre but est d'étudier la régularité de la solution u de l'équation intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log|x - \xi|\, u(\xi)\, d\sigma(\xi) = f(x), \qquad x \in \Gamma,$$

en fonction de celle de la donnée frontière f. En particulier, il importe de décrire le comportement singulier de u au voisinage de chaque sommet sous forme d'une combinaison linéaire de fonctions singulières associées à ce sommet.

Soit $f \in L^2(\Gamma)$. Pour rappel, le potentiel de simple couche de densité f est la fonction

$$\mathcal{S}f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log|x-\xi|\, f(\xi)\, d\Gamma(\xi), \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Il s'agit d'une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$.

On note S l'opérateur frontière intégral défini par la trace sur Γ du potentiel de simple couche. On a

$$Sf(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log|x-\xi|\, f(\xi)\, d\Gamma(\xi), \qquad x \in \Gamma.$$

De même, on note $(1/2)\, I - K^*$ l'opérateur frontière intégral défini par la trace sur Γ de la dérivée normale du potentiel de simple couche. On a

$$\begin{aligned} [(1/2)\, I - K^*] f(x) &= \partial_{\nu_x} \mathcal{S} f(x) \\ &= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{(\xi - x) \cdot \nu_x}{|x-\xi|^2} f(\xi)\, d\Gamma(\xi), \qquad x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Enfin, si $f \in H^1(\Gamma)$, on définit la fonction $Df \in L^2(\Gamma)$ par la condition

$$(Df)_{|\Gamma_\ell} \circ \sigma_\ell := D\left(f_{|\Gamma_\ell} \circ \sigma_\ell\right) \in L^2(]0, L_\ell[), \qquad \text{pour tout } \ell = 0, 1, \ldots, M-1.$$

Rappelons à présent les principales propriétés de ces opérateurs. Pour plus de détails, on peut consulter [26], [20] ou [2]. Dans ces conditions,

- l'opérateur $S : L^2(\Gamma) \to H^1(\Gamma)$ est continu;
- l'opérateur $S : L^2(\Gamma) \to H^1(\Gamma)$ est un isomorphisme si $\gamma \neq 1$;
- l'opérateur $D : H^1(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ est continu;
- l'opérateur $(1/2)\, I - K^* : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ est continu;
- l'opérateur $(1/2)\, I - K^* : L^2_0(\Gamma) \to L^2_0(\Gamma)$ est un isomorphisme;
- il existe $f_0 \in L^2(\Gamma)$ unique tel que

$$\int_\Gamma f_0\, d\sigma = 1,$$

  $\ker\left(\frac{1}{2} I - K^*\right) = \rangle f_0 \langle$ et $L^2(\Gamma) = \rangle f_0 \langle \oplus L^2_0(\Gamma)$.

Par ailleurs, on démontre que

$$f_0(x) = \frac{|D\varphi(x)|}{2\pi}, \qquad x \in \Gamma$$

et

$$Sf_0\,(a) = \frac{\log \gamma}{2\pi}, \qquad a \in \Omega,$$

voir par exemple [9] ou [22].
Considérons l'opérateur $T = DS$. Nous pouvons établir le résultat suivant.

PROPOSITION 1. *L'opérateur $T : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ est continu. De plus, on a*

$$\ker T = \rangle f_0 \langle \ \text{ et } \ \operatorname{im} T = L^2_0(\Gamma).$$

En particulier, l'opérateur $T : L^2_0(\Gamma) \to L^2_0\,(\Gamma)$ est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. Le premier point est une conséquence immédiate de ce qui précède.

Pour le deuxième point, on note tout d'abord que si $f \in \ker T$, alors $DSf = 0$. Il s'ensuit que $Sf_{|\Gamma_j} = c_j \in \mathbb{C}$ pour tout j. Comme $Sf \in H^1\,(\Gamma)$, on a Sf est constant sur Γ par continuité. Dès lors, il vient $[(1/2)\,I - K^*]\,f = \partial\nu Sf = 0$, donc $f \in \rangle f_0 \langle$.

Réciproquement, si $f = \lambda f_0$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $Sf = (\lambda \log \gamma)/2\pi$ et donc $Tf = DSf = 0$.

Démontrons le troisième point. Si $f \in \operatorname{im} T$, il existe $g \in L^2(\Gamma)$ tel que$f = Tg = DSg$. On a

$$\int_\Gamma f\, d\sigma = \sum_{j=0}^{M-1} \left[(Sg)_{|\Gamma_j}(P_{j+1}) - (Sg)_{|\Gamma_j}(P_j)\right] = 0,$$

car $Sg \in H^1(\Gamma) \subset C^0(\Gamma)$.

Réciproquement, si $f \in L^2_0(\Gamma)$, on peut trouver $h \in H^1(\Gamma)$ tel que $Dh = f$. De plus, comme S est un isomorphisme, il existe $g \in L^2\,(\Gamma)$ tel que $Sg = h$. Au total, on a $Tg = f$.
Il reste à prouver que T est un isomorphisme de $L^2_0(\Gamma)$ dans lui-même. Il est visiblement continu et à valeurs dans $L^2_0\,(\Gamma)$. Montrons qu'il est surjectif. Si $f \in L^2_0(\Gamma)$, il existe $g \in L^2(\Gamma)$ tel que $Tg = f$. On vérifie immédiatement que

$$g - f_0 \int_\Gamma g\, d\sigma \in L^2_0(\Gamma)$$

convient. Par ailleurs, T est injectif car si $f \in L^2_0(\Gamma)$ est tel que $Tf = 0$, alors $f = \lambda f_0$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. En intégrant les deux membres de cette égalité sur Γ, il vient $\lambda = 0$ et donc $f = 0$. ■

Il découle de la proposition précédente que T n'est pas un isomorphisme de $L^2(\Gamma)$ dans lui-même. On peut régler ce problème mineur en ajoutant à T un opérateur dont l'image est de dimension 1. Soit $U : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ défini par

$$f \mapsto Tf + \int_\Gamma f d\sigma.$$

PROPOSITION 2. *L'opérateur U est un isomorphisme de $L^2(\Gamma)$ dans lui-même.*

DÉMONSTRATION. La continuité de U est immédiate. Etablissons l'injectivité de U. Si $f \in L^2(\Gamma)$ est tel que $Uf = 0$, alors, en écrivant $f = g + \lambda f_0$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $g \in L_0^2(\Gamma)$, il vient

$$0 = U(g + \lambda f_0) = Tg + \lambda.$$

En intégrant les deux membres de cette égalité sur Γ, on obtient $\lambda = 0$ et $Tg = 0$. Par la Proposition 1, on a $g = 0$. Au total, $f = 0$. Pour la surjectivité, on note que si $g \in L^2(\Gamma)$, alors

$$g' = g - \frac{1}{\operatorname{mes}(\Gamma)} \int_\Gamma g d\sigma \in L_0^2(\Gamma).$$

Par la Proposition 1, il existe $h \in L_0^2(\Gamma)$ tel que $Th = g'$. Dans ces conditions,

$$f = h + \frac{f_0}{\operatorname{mes}(\Gamma)} \int_\Gamma g d\sigma \in L_0^2(\Gamma)$$

satisfait à $Uf = g$. ∎

Donnons à présent la structure de la solution de l'équation frontière $Sf = g$.

COROLLAIRE 3. *Pour tout $g \in H^1(\Gamma)$, l'unique solution $f \in L^2(\Gamma)$ de l'équation $Sf = g$ s'écrit sous la forme $h + \lambda f_0$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $h \in L_0^2(\Gamma)$ est l'unique solution de l'équation $Th = Dg$.*

DÉMONSTRATION. Si $g \in H^1(\Gamma)$, on a $Dg \in L_0^2(\Gamma)$. Dès lors, il existe un et un seul $h \in L^2(\Gamma)$ tel que $Th = Dg$. Si $f \in L^2(\Gamma)$ est l'unique solution de l'équation $Sf = g$, alors $f - h \in \ker T$, ce qui permet de conclure. ∎

L'intérêt de cette décomposition est de réduire notre problème à l'étude du comportement singulier de la solution de l'équation $Th = Dg$ au voisinage des sommets puisque celui de f_0 est connu, voir [2]. Afin d'obtenir celui-ci, nous étudions les propriétés locales d'inversion de T au voisinage d'un sommet de Ω en utilisant le modèle de l'angle infini.

2.2. CAS DE L'ANGLE INFINI

On se place dans l'ouvert $\Omega = \{re^{i\theta} : r > 0, \theta \in]0, \omega[\}$ de $\mathbb{R}^2$, avec $\omega \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$. On pose $\Gamma_0 = \{r : r \geq 0\}$ et $\Gamma_\omega = \{re^{i\omega} : r \geq 0\}$ de sorte que $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_\omega$.

Si $f = (f_0, f_\omega)$ et $g = (g_0, g_\omega)$, alors en paramétrant $\partial\Omega$ par la longueur d'arc, on a

$$S \begin{bmatrix} f_0 \\ f_\omega \end{bmatrix}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \log|x - \xi| f_0(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \log\sqrt{x^2 - 2x\xi\cos\omega + \xi^2} f_\omega(\xi) d\xi \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \log\sqrt{x^2 - 2x\xi\cos\omega + \xi^2} f_0(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \log|x - \xi| f_\omega(\xi) d\xi \end{bmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'équation $Tf = g$ se réécrit sous la forme

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} H_+ & A \\ -A & -H_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_w \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

où H_+ est la transformation de Hilbert unilatérale sur $\mathbb{R}_+$ définie par

$$H_+u(x) = \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_0^{+\infty}\frac{u(\xi)}{x-\xi}d\xi,$$

et A est l'opérateur défini par

$$Au(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(\xi - x\cos\omega)\,u(\xi)}{x^2 - 2x\xi\cos\omega + \xi^2}d\xi.$$

Pour rappel, l'opérateur H_+ est continu de $L^2(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même et on a

$$\mathcal{M}H_+f(1/2+it) = \cot(1/2+it)\mathcal{M}f(1/2+it) \qquad \text{pour tout } f \in L^2(\mathbb{R}_+),$$

où $\mathcal{M}$ est la transformation de Mellin définie dans (2.2).
Par ailleurs, si on pose

$$K_\omega u(x) = \frac{x\sin\omega}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{u(\xi)}{x^2 - 2x\xi\cos\omega + \xi^2}d\xi$$

et

$$T_\omega u(x) = \frac{\sin\omega}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\xi\,u(\xi)}{x^2 - 2x\xi\cos\omega + \xi^2}d\xi,$$

on obtient

$$A = \frac{1}{\sin\omega}K_\omega - \frac{\cos\omega}{\sin\omega}T_\omega.$$

Il est connu, voir [15] et [2], que K_ω et T_ω sont des opérateurs à noyaux, continus de $L^2(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même et tels que

$$\mathcal{M}K_\omega(1/2+it) = \frac{\sin[(1/2+it)(\pi-\omega)]}{\sin[(1/2+it)\pi]}\mathcal{M}f(1/2+it)$$

et

$$\mathcal{M}T_\omega(1/2+it) = \frac{\sin[(-1/2+it)(\pi-\omega)]}{\sin[(-1/2+it)\pi]}\mathcal{M}f(1/2+it)$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Il en résulte que A est un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même et que

$$\mathcal{M}Af(1/2+it) = -\frac{\cos[(-1/2+it)(\pi-\omega)]}{\sin[(-1/2+it)\pi]}\mathcal{M}f(1/2+it)$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. En particulier, les opérateurs A et H_+ commutent puisqu'ils commutent au niveau de leur transformée de Mellin.

Pour des données g_0, g_ω, la résolution de l'équation (2.1) se ramène à l'inversion de l'opérateur matriciel

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} H_+ & A \\ -A & -H_+ \end{pmatrix}$$

Ce dernier est visiblement continu de $L^2(\mathbb{R}_+)\times L^2(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même.

Formellement, on a

$$\mathcal{T}^{-1} = 2\left(A^2 - H_+^2\right)^{-1}\begin{pmatrix} -H_+ & -A \\ A & H_+ \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\left(A^2 - H_+^2\right)^{-1} A &= \frac{1}{2}\left[(A-H_+)^{-1} + (A+H_+)^{-1}\right]\\ \left(A^2 - H_+^2\right)^{-1} H_+ &= \frac{1}{2}\left[(A-H_+)^{-1} - (A+H_+)^{-1}\right].\end{aligned}$$

Il suffit donc d'inverser les opérateurs $A \pm H_+$.

PROPOSITION 4. *Les opérateurs $A \pm H_+$ sont des isomorphismes de $L^2(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même. De plus, on a*

$$\mathcal{M}\,(A \pm H_+)\,f(1/2+it) = -\tfrac{\cos[(-1/2+it)\pi]\pm\cos[(-1/2+it)(\pi-\omega)]}{\sin[(-1/2+it)\pi]}\mathcal{M}f\,(1/2+it)$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. En particulier, on a

$$(A \pm H_+)\,f(x) = \mathcal{M}^{-1}_{t\to x}\left(\tfrac{\sin[(-1/2+it)\pi]}{\cos[(-1/2+it)\pi]\pm\cos[(-1/2+it)(\pi-\omega)]}\mathcal{M}f\,(1/2+it)\right)$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

DÉMONSTRATION. La première partie résulte des remarques précédentes. Pour la seconde partie, on note d'abord que les inverses sont bien définis puisque le poids

$$t \mapsto \frac{\sin\left[(-1/2+it)\,\pi\right]}{\cos\left[(-1/2+it)\,\pi\right] \pm \cos\left[(-1/2+it)\,(\pi-\omega)\right]}$$

est borné sur $\mathbb{R}$. Ensuite, on vérifie aisément que ceux-ci conviennent en travaillant au niveau de la transformée de Mellin. ∎

Soient les fonctions

$$m_\pm(z) = \frac{\sin(z\pi)}{\cos(z\pi) \pm \cos(z(\pi-\omega))}$$

On vérifie facilement que les pôles de m_- (resp. m_+) sont les nombres

$$\frac{2k\pi}{\omega}, \frac{2k\pi}{2\pi-\omega}, \text{ (resp. } \frac{(2k+1)\,\pi}{\omega}, \frac{(2k+1)\,\pi}{2\pi-\omega})$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Le numérateur de m_- (resp. m_+) s'annule en un de ces nombres si et seulement si celui-ci est entier. De même, la dérivée du dénominateur de m_- (resp. m_+) s'annule en un de ces nombres si et seulement si celui-ci est entier. Dans ce cas, la dérivée seconde du dénominateur ne s'annule pas. En particulier, tous les pôles de m_- (resp. m_+) sont simples. Remarquons encore que si $2k\pi/\omega = \ell \in \mathbb{Z}$, alors $(2k'\pi) / (2\pi - \omega) = \ell$ avec $k' = \ell - k$.

Il est commode de réécrire les opérateurs $(A \pm H_+)^{-1}$ sous la forme $H_+ + B_\pm$ avec

$$B_\pm f(x) = \mathcal{M}_{t\to x}^{-1} \left[\frac{1\pm\cos[(-1/2+it)\pi]\cos[(-1/2+it)(\pi-\omega)]}{\sin[(-1/2+it)\pi][\cos[(-1/2+it)\pi]\pm\cos[(-1/2+it)(\pi-\omega)]]} \mathcal{M}f(-1/2+it) \right].$$

Le symbole

$$t \mapsto \frac{1 \pm \cos\left[\left(-\frac{1}{2}+it\right)\pi\right]\cos\left[\left(-\frac{1}{2}+it\right)(\pi-\omega)\right]}{\sin\left[\left(-\frac{1}{2}+it\right)\pi\right]\left[\cos\left[\left(-\frac{1}{2}+it\right)\pi\right] \pm \cos\left[\left(-\frac{1}{2}+it\right)(\pi-\omega)\right]\right]}$$

est continu sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 lorsque $t \to \pm\infty$. Par conséquent, l'opérateur $B_\pm$ est continu de $L^2(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même.

Comme le montre la proposition suivante, les opérateurs $B_\pm$ sont caractérisés par un noyau (-1)-homogène de classe C_∞.

PROPOSITION 5. *Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, on a*

$$B_\pm f(x) = \int_0^{+\infty} b_\pm(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$$

avec

$$b_\pm(x,\xi) = \mp\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{+\infty} x^{-1/2-it}\xi^{-1/2+it}\beta_\pm(t,\omega)\, dt,$$

où

$$\beta_\pm(t,\omega) = \frac{1 \pm \cos[(-1/2+it)\pi]\cos[(-1/2+it)(\pi-\omega)]}{\sin[(-1/2+it)\pi][\cos[(-1/2+it)\pi] \pm \cos[(-1/2+it)(\pi-\omega)]]}.$$

DÉMONSTRATION. On procède par densité. Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, on a

$$B_\pm f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{+\infty} x^{-1/2-it}\beta(t,\omega)\,\mathcal{M}f(1/2+it)\, dt$$

en permutant les intégrales. Montrons pour conclure que les noyaux $b_\pm$ définissent des opérateurs continus sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. En appliquant le théorème de dérivation des intégrales paramétriques, on a $b_\pm(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$. De plus, comme il existe $0 < \epsilon < 1/2$ tel que la fonction

$$z \mapsto \frac{1 \pm \cos(z\pi)\cos(z(\pi-\omega))}{\sin(z\pi)[\cos(z\pi) \pm \cos(z(\pi-\omega))]}$$

ne possède pas de pôles dans la bande $\{z \in \mathbb{C} : -1/2-\epsilon < \operatorname{Re} z < -1/2+\epsilon\}$, alors on vérifie facilement que

$$b_\pm(x,\xi) = \mp\frac{1}{2\pi}\int_{\operatorname{Re} z = s} x^{-z-1}\xi^z \frac{1 \pm \cos(z\pi)\cos(z(\pi-\omega))}{\sin(z\pi)[\cos(z\pi) \pm \cos(z(\pi-\omega))]}\, dl(z)$$

pour tout $s \in]1/2-\epsilon, -1/2+\epsilon[$ en déformant le contour d'intégration. Les fonctions $(x,\xi) \mapsto |b_\pm(x,\xi)|$ sont mesurables sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, positives, (-1)-homogènes et vérifient

$$C_\pm = \int_0^{+\infty} b_\pm(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$$

puisque

$$x^{-1/2}|b_\pm(x,1)| \leq c[x^{-1+\epsilon}\chi_{]0,1[}(x) + x^{-1+\epsilon}\chi_{]1,+\infty[}(x)].$$

Elles définissent donc des opérateurs continus de $L^2(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même (cf. [11]). Ainsi, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, la fonction

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} b_\pm(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$$

appartient à $L^2(\mathbb{R}_+)$ et on a

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{+\infty} b_\pm(.,\xi) f(\xi)\, d\xi \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} &\leq \left\| \int_0^{+\infty} |b_\pm(.,\xi)|\, |f(\xi)|\, d\xi \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\ &\leq C_\pm \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}, \end{aligned}$$

car

$$\left| \int_0^{+\infty} b_\pm(.,\xi) f(\xi)\, d\xi \right| \leq \int_0^{+\infty} |b_\pm(.,\xi)|\, |f(\xi)|\, d\xi \in L^2(\mathbb{R}_+).$$

■

Il est possible d'étendre la définition des opérateurs $A \pm H_+$ dans des espaces de Sobolev d'indice élevé où ils demeurent bijectifs. Ces espaces font intervenir des fonctions singulières définies à partir des pôles de $m_\pm$.

PROPOSITION 6. *Si $s \geq 0$, alors la transformation de Hilbert H_+ est continue de $H_0^s(\mathbb{R}_+)$ dans $H^s(\mathbb{R}_+)$.*

Pour un démonstration voir [2].

PROPOSITION 7. *Si $s \geq 0$, alors l'opérateur A est continu de $H_0^s(\mathbb{R}_+)$ dans $H^s(\mathbb{R}_+)$.*

DÉMONSTRATION. La démonstration est une conséquence directe de l'égalité

$$A = \frac{1}{\sin\omega} K_\omega - \frac{\cos\omega}{\sin\omega} T_\omega$$

et de résultats analogues pour les opérateurs K_ω et T_ω que l'on peut trouver dans [2]. ■

Introduisons les fonctions singulières liées à l'inversion de $\mathcal{T}$. On pose

$$\begin{aligned} l_\omega^- &= \{2k\pi/\omega : k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{2k\pi/(2\pi-\omega) : k \in \mathbb{N}_0\} \\ l_\omega^+ &= \{(2k+1)\pi/\omega : k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(2k+1)\pi/(2\pi-\omega) : k \in \mathbb{N}_0\}. \end{aligned}$$

On note au passage que les éléments de $l_\omega^\pm$ sont strictement supérieurs à $1/2$ puisque $\omega \in]0,2\pi[\setminus\{\pi\}$.

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\chi = 1$ au voisinage de 0. Si $s + 1/2 \notin l_\omega^\pm$, on baptise $\chi\mathfrak{L}_{\omega,s}^\pm$ l'enveloppe linéaire dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ des fonctions

- $x^{\alpha-1}\chi(x)$ si $\alpha \in l_\omega^\pm$, $1/2 < \alpha < s + \frac{1}{2}$ et α non entier;
- $x^{\alpha-1}\chi(x)$, $x^{\alpha-1}\log x\,\chi(x)$ si $\alpha \in l_\omega^\pm \cap \mathbb{N}$ et $1/2 < \alpha < s + 1/2$.

Le comportement de la transformée de Mellin des fonctions de type $x^\alpha\chi(x)$ et $x^\alpha \log x\,\chi(x)$ est décrit dans le lemme suivant, voir [2].

LEMME 8. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\chi = 1$ au voisinage de 0. Si*

$$f(x) = x^\alpha \chi(x),$$

alors $\mathcal{M}f$ est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus\{-\alpha\}$ avec un pôle simple en $z = -\alpha$ et pour tout $M > 0$, il existe des constantes C_k>0, avec $k \in \mathbb{N}$, telles que

$$|\mathcal{M}f(z)| \leq \frac{C_k}{(1+|\operatorname{Im} z|)^k}\frac{1}{|z+\alpha|}$$

si $|\operatorname{Re} z| \leq M$. De même, si

$$g(x) = x^\alpha \log x\,\chi(x),$$

alors $\mathcal{M}g$ est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus\{-\alpha\}$ avec un pôle double en $z = -\alpha$ et pour tout $M > 0$, il existe des constantes $C_k > 0$, avec $k \in \mathbb{N}$, telles que

$$|\mathcal{M}f(z)| \leq \frac{C_k}{(1+|\operatorname{Im} z|)^k}\frac{1}{|z+\alpha|^2}$$

si $|\operatorname{Re} z| \leq M$.

Le principal résultat de bijection pour les opérateurs $A \pm H_+$ est le suivant.

THÉORÈME 9. *Si $\Omega \in]0, 2\pi[\setminus\{\pi\}$, $s \geq 0$ tel que $s + 1/2 \notin l_\omega^\pm$, et $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\chi = 1$ au voisinage de 0, alors l'opérateur*

$$A \pm H_+ : H_0^s(\mathbb{R}_+) + \chi\mathfrak{L}_{\omega,s}^\pm \to H^s(\mathbb{R}_+)$$

est bijectif.

L'espace de départ ne dépend pas du choix de la fonction de troncature χ. De fait, si $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est tel que $\psi = 1$ au voisinage de 0, alors on a $(\psi - \chi)\mathfrak{L}_{\omega,s}^\pm \subset H_0^s(\mathbb{R}_+)$ car $\psi - \chi$ s'annule au voisinage de 0. On impose la condition $s + 1/2 \notin e_\omega^\pm$ pour éviter d'avoir une fonction singulière exactement à la transition de régularité.

DÉMONSTRATION. Le caractère bijectif de $A \pm H_+$ de $L^2(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même est connu. Il suffit donc de prouver que les opérateurs $A \pm H_+$ et $(A \pm H_+)^{-1}$ agissent dans les bons espaces. Si $f \in H_0^s(\mathbb{R}_+)$, alors on a $(A \pm H_+)f \in H^s(\mathbb{R}_+)$. Il s'agit d'une conséquence immédiate des Propositions 6 et 7. De plus, si $\alpha \in l_\omega^\pm$ et $f(x) = x^{\alpha-1}\chi(x)$, alors $(A \pm H_+)f \in H^s(\mathbb{R}_+)$ pour tout $s \geq 0$. De fait, posons

$$\mathcal{M}(A \pm H_+)f(z) = \frac{\cos((z-1)\pi) \pm \cos((z-1)(\pi-\omega))}{\sin((z-1)\pi)}\mathcal{M}f(z).$$

D'une part, la fonction $\mathcal{M}(A \pm H_+)f$ est holomorphe dans

$$\{z \in \mathbb{C} : 1/2 - s < \operatorname{Re} z < 1/2\} \backslash \{0, -1, -2, \ldots\}$$

car, par définition de $l_\omega^\pm$, le premier facteur s'annule en $z = 1 - \alpha$. D'autre part, elle satisfait à la majoration

$$\sup_{\substack{k+\sigma<s \\ k\in\mathbb{N}, 0<\sigma<1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{M}(A \pm H_+)f(1/2 - k - \sigma + ix)|^2 (1+x^2)^k \left[(1/2 - \sigma)^2 + \tfrac{\sigma x^2}{(1+x^2)^{1-\sigma}}\right] dx < \infty$$

pour tout $s \geq 0$, car les pôles de $\mathcal{M}(A \pm H_+)f$ aux entiers sont neutralisés par le poids dans un voisinage de ceux-ci et le poids lui-même est borné hors de ce voisinage. On utilise ensuite les estimations du Lemme 8 pour conclure. Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$, un raisonnement analogue permet de montrer que

$$(A \pm H_+)g \in H^s(\mathbb{R}_+)$$

pour tout $s \geq 0$, avec $g(x) = x^{\alpha-1} \log x \, \chi(x)$. Au total, l'opérateur $A \pm H_+$ envoie bien $H_0^s(\mathbb{R}_+) + \chi \mathfrak{L}_\omega^\pm$ sur $H^s(\mathbb{R}_+)$. Réciproquement, si $f \in H^s(\mathbb{R}_+)$, avec $s + 1/2 \notin l_\omega^\pm$, alors le développement en fonctions singulières de $(A \pm H_+)^{-1}f$ peut s'obtenir de la manière suivante. On écrit formellement

$$(A \pm H_+)^{-1} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\operatorname{Re} z = 1/2} x^{-z} \frac{\sin((z-1)\pi)}{\cos((z-1)\pi) \pm \cos((z-1)(\pi - \omega))} \mathcal{M}f(z) dz.$$

Si on déforme cette dernière intégrale jusqu'à $\operatorname{Re} z = 1/2 - s$, on passe par les pôles de l'intégrand. Ceci génère de résidus qui contribuent sous la forme de fonctions singulières. Calculons donc les résidus de

$$F_\pm(z) = x^{-z} m \pm (z-1) \mathcal{M}f(z).$$

a) En $z = -\alpha$ avec $1 + \alpha \in l_\omega^\pm$ et $1 + \alpha$ non entier, la fonction $F_\pm$ admet un pôle simple. On a

$$\operatorname*{Res}_{z=-\alpha} F_-(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\omega} x^{2k\pi/\omega - 1} \mathcal{M}f(1 - 2k\pi/\omega) & \text{si } 1 + \alpha = \dfrac{2k\pi}{\omega}, \\[2ex] -\dfrac{1}{2\pi - \omega} x^{(2k\pi)/(2\pi-\omega)-1} \mathcal{M}f(1 - 2k\pi/(2\pi - \omega)) & \text{si } 1 + \alpha = \dfrac{2k\pi}{(2\pi - \omega)}, \end{cases}$$

et

$$\operatorname*{Res}_{z=-\alpha} F_+(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\omega} x^{(2k+1)\pi/\omega - 1} \mathcal{M}f(1 - (2k+1)\pi/\omega) & \text{si } 1 + \alpha = \dfrac{(2k+1)\pi}{\omega}, \\[2ex] -\dfrac{1}{2\pi - \omega} x^{(2k+1)\pi/(2\pi-\omega)-1} \mathcal{M}f(1 - (2k+1)\pi/\omega) & \text{si } 1 + \alpha = \dfrac{(2k+1)\pi}{2\pi - \omega} \end{cases}$$

b) En $z = -\alpha$ avec $1 + \alpha = p \in l_\omega^\pm \cap \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}_0$, la fonction $F_\pm$ admet un pôle double. On a

$$\operatorname*{Res}_{z=-\alpha} F_\pm(z) = \frac{2\pi}{\omega(2\pi-\omega)} x^{p-1} D\left((z+p-1)\mathcal{M}f(z)\right)_{|z=1-p} - x^{p-1}\log x \frac{D^{p-1}f(0)}{(p-1)!}.$$

Considérons à présent la fonction

$$g_\pm(x) = (A \pm H_+)^{-1} f(x) - \chi(x) L_\pm f(x)$$

où

$$\begin{aligned} L_- f(x) &= -\frac{1}{\omega} \sum_{\frac{1}{2} < \frac{2k\pi}{\omega} < \frac{1}{2}+s} x^{2k\pi/\omega - 1} \mathcal{M}f(1 - 2k\pi/\omega) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi-\omega} \sum_{\frac{1}{2} < \frac{2k\pi}{2\pi-\omega} < \frac{1}{2}+s} x^{2k\pi/(2\pi-\omega)-1} \mathcal{M}f(1 - 2k\pi/(2\pi-\omega)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_+ f(x) &= -\frac{1}{\omega} \sum_{\frac{1}{2} < \frac{(2k+1)\pi}{\omega} < \frac{1}{2}+s} x^{(2k+1)\pi/\omega - 1} \mathcal{M}f(1 - (2k+1)\pi/\omega) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi-\omega} \sum_{\frac{1}{2} < \frac{(2k+1)\pi}{2\pi-\omega} < \frac{1}{2}+s} x^{(2k+1)\pi/(2\pi-\omega)-1} \mathcal{M}f(1 - (2k+1)\pi/(2\pi-\omega)). \end{aligned}$$

Si un des exposants est entier et s'écrit sous la forme $p-1$ avec $p \in \mathbb{N}_0$, il faut remplacer les deux termes correspondants dans le développement par

$$-\frac{2\pi}{\omega(2\pi-\omega)}\left[x^{p-1} D\left((z+p-1)\mathcal{M}f(z)\right)_{|z=1-p} - x^{p-1}\log x \frac{D^{p-1}f(0)}{(p-1)!}\right].$$

Il reste à prouver que $G_\pm \in H_0^s(\mathbb{R}_+)$ pour achever la démonstration. On commence par démontrer l'appartenance à $H^s(\mathbb{R}_+)$. D'une part, la fonction $\mathcal{M}G_\pm$ est holomorphe dans la bande $\{z \in \mathbb{C} : 1/2 - s < \operatorname{Re} z < 1/2\}$, car au niveau de la Mellin, le développement en fonctions singulières correspond exactement à la partie singulière du développement de Laurent de $\mathcal{M}(A \pm H_+)^{-1} f$ au voisinage de ses pôles. D'autre part, on a

$$\sup_{\substack{k+\sigma<s \\ k\in\mathbb{N}, 0<\sigma<1}} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{M}G_\pm(1/2 - k - \sigma + ix)|^2 (1+x^2)^k \left[\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^2 + \frac{\sigma x^2}{(1+x^2)^{1-\sigma}}\right] dx < \infty.$$

Pour le voir, on note que dans un voisinage des pôles de $\mathcal{M}(A \pm H_+)^{-1} f$, l'intégrand est borné. Hors de ce voisinage, on traite chaque terme séparément: pour $\mathcal{M}f(z)$ et $m_\pm(z-1)\mathcal{M}f(z)$, on utilise le fait que $f \in H^s(\mathbb{R}_+)$ et que $m_\pm(z-1)$ est borné tandis que pour les fonctions singulières, on recourt à nouveau aux estimations du Lemme 8. Enfin, comme

$$\operatorname*{Res}_{z=-k} \mathcal{M}G_\pm(z) = 0,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k < s - 1/2$, on peut conclure. ■

Donnons une version locale du Théorème 9. Celle ci nous sera utile pour établir le résultat de bijection principal dans un ouvert polygonal.

DÉFINITION 10. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Si $s \geq 0$, alors on définit $[f]_s$, sous-ensemble fermé de $\overline{\mathbb{R}_+}$, par:*

- *$x \notin [f]_s$ si et seulement s'il existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\psi = 1$ au voisinage de x et $\psi f \in H^s(\mathbb{R}_+)$.*

De la même façon, si $s \geq 0$, $s + 1/2 \notin l_\omega^\pm$ et $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\chi = 1$ au voisinage de 0, alors on définit $[f]_{\omega,s}^\pm$, sous-ensemble fermé de $\overline{\mathbb{R}_+}$, par:

- *$x \notin [f]_{\omega,s}^\pm$ si et seulement s'il existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\psi = 1$ au voisinage de x et $\psi f \in H_0^s(\mathbb{R}_+) + \chi\mathfrak{L}_{\omega,s}^\pm$.*

On pourrait voir intuitivement $[f]_s$ comme le support H^s de f, c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble des points où f n'est pas H^s, si cela avait bien sûr un sens ponctuellement.

LEMME 11. *Si $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ tel que $[f]_{pp} \subset [N, +\infty[$ avec $0 < N < 1$ et si $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\chi = 1$ au voisinage de 0, alors $(A \pm H_+)^{-1} f \in H_0^s(\mathbb{R}_+) + \chi\mathfrak{L}_{\omega,s}^\pm$ pour tout $s \geq 0$ tel que $s + 1/2 \notin l_\omega^\pm$.*

DÉMONSTRATION. On pose

$$\mathcal{M}f(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} f(x)\, dx = \mathcal{F}_{s\to \operatorname{Im} z}^{-}\left(e^{-s\operatorname{Re} z} f(e^{-s})\right)$$

si $\operatorname{Re} z < 1/2$. La fonction $\mathcal{M}f$ est holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1/2\}$ et possède une valeur au bord au sens de Hardy en $\operatorname{Re} z = 1/2$ car

$$\begin{aligned}
\sup_{\frac{1}{2}-s<x<\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{M}f(x+iy)|^2\, dy &= 2\pi \sup_{\frac{1}{2}-s<x<\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} \left|f\left(e^{-t}\right)\right|^2 dt \\
&\leq 2\pi \left(1 + N^{-2s}\right) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2.
\end{aligned}$$

La fonction $\mathcal{M}(A \pm H_+)^{-1} f(z) = m_\pm(z-1)\mathcal{M}f(z)$ est donc méromorphe dans $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1/2\}$. Ses pôles sont ceux de $m_\pm(z-1)$. En procédant ensuite comme dans la démonstration du Théorème 9, on montre que

$$\mathcal{M}(A \pm H_+)^{-1} f(x) - \chi(x) L_\pm f(x) \in H_0^s(\mathbb{R}_+)$$

pour tout $s \geq 0$ tel que $s + 1/2 \notin l_\omega^\pm$. ■

PROPOSITION 12. *Si* $\omega \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$, $s \geq 0$, $s + \frac{1}{2} \notin l_\omega^\pm$, *alors*

$$[(A \pm H_+)f]_s = [f]_{\omega,s}^\pm$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

DÉMONSTRATION. On démontre l'égalité des complémentaires. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Si $x \notin [f]_{\omega,s}^\pm$, alors il existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\psi = 1$ au voisinage de x et $\psi f \in H_0^s(\mathbb{R}_+) + \chi \mathfrak{L}_{\omega,s}^\pm$. On a

$$(A \pm H_+)f = A((1-\psi)f) \pm H_+((1-\psi)f) + (A \pm H_+)(\psi f).$$

Le dernier terme appartient à $H^s(\mathbb{R}_+)$ en vertu du Théorème 9. Pour les deux premiers termes, on remarque qu'ils sont de classe C^∞ au voisinage de x puisque dans ce cas $(1-\psi)f$ est nul dans un voisinage de x.

Réciproquement, si $g = (A \pm H_+)f$ et si $x \notin [g]_s$, alors il existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\psi = 1$ au voisinage de x et $\psi g \in H^s(\mathbb{R}_+)$.

On écrit

$$f = (A \pm H_+)^{-1} g = (A \pm H_+)^{-1}(\psi g) + (A \pm H_+)^{-1}((1-\psi)g).$$

Le premier terme appartient à $H_0^s(\mathbb{R}_+) + \chi \mathfrak{L}_{\omega,s}^\pm$ par le Théorème 9. Pour le second, on note que si $x \neq 0$, alors

$$(A \pm H_+)^{-1}((1-\psi)g) = H_+((1-\psi)g) + B_\pm((1-\psi)g)$$

est de classe C^∞ au voisinage de x par la Proposition 5 et si $x = 0$, on a $(A \pm H_+)^{-1}((1-\psi)g) \in H^s(\mathbb{R}_+) + \chi \mathfrak{L}_{\omega,s}^\pm$ par le Lemme 11, ce qui permet de conclure. ■

Un résultat de régularité locale pour l'opérateur H_+ s'avère également indispensable.

PROPOSITION 13. *Soient* $x_0 > 0$ *et* $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. *S'il existe* $s \geq 0$ *et* $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ *tel que* $\chi = 1$ *au voisinage de* x_0 *et* $\chi H_+ f \in H^s(\mathbb{R}_+)$, *alors il existe* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ *tel que* $\psi = 1$ *au voisinage de* x_0 *et* $\psi f \in H_0^s(\mathbb{R}_+)$.

DÉMONSTRATION. Pour rappel, la transformation de Hilbert $H : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

$$f \mapsto Hf(x) = \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}dy = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{\xi\to x}^\pm \left(\mp i \operatorname{sgn}(\xi)\, \mathcal{F}_{\xi\to x}^\mp f(x)\right)$$

est un isomorphisme et vérifie $H^2 = -I$. La transformée de Hilbert unilatérale de $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ est définie comme la restriction à $\mathbb{R}_+$de $H\widetilde{f}$ où $\widetilde{f}$ désigne le prolongement de f par 0 dans $]-\infty, 0[$, voir [2].

Si $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ satisfait aux hypothèses de l'énoncé, on écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_0^{+\infty}\frac{H\tilde{f}(y)}{x-y}dy - \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{0}\frac{H\tilde{f}(y)}{x-y}dy \\ &= -\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_0^{+\infty}\frac{H_+f(y)}{x-y}dy - \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_0^{+\infty}\frac{H\tilde{f}(-y)}{x+y}dy \\ &= -H_+(\chi H_+f)(x) - H_+((1-\chi)H_+f)(x) - \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_0^{+\infty}\frac{H\tilde{f}(-y)}{x+y}dy. \end{aligned}$$

Le premier terme appartient à $H^s(\mathbb{R}_+)$ en vertu de la Proposition 6. En effet, le support de χ étant un compact de $\mathbb{R}_+$, on a $\chi H_+ f \in H_0^s(\mathbb{R}_+)$. Par ailleurs, on note que les deux autres termes sont de classe C^∞ au voisinage de x_0, d'où la conclusion. ∎

2.3. Cas d'un ouvert polygonal

Dans le cas d'un ouvert polygonal, le théorème principal de régularité nécessite l'introduction d'espaces de type Sobolev sur la frontière qui prennent en compte les fonctions singulières générées à chaque sommet du polygone.

Décrivons d'abord les fonctions singulières associées à chaque sommet P_j. Soit $\chi_j$une fonction définie sur Γ , qui est la restriction à Γ d'un élément de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et qui est égale à δ_{jk} au voisinage P_k pour tout $0 \le k \le M-1$. On désigne par x la distance à P_j et par (f,g) la fonction définie sur Γ dont la restriction à Γ_j est f, la restriction à Γ_{j-1} est g et qui est nulle sur Γ_k pour tout $k \neq j$ et de $j-1$.

Pour tout $s \geq 0$ tel que $s+\frac{1}{2} \notin l^+_{\omega_j} \cup l^-_{\omega_j}$, alors, on baptise $\chi_j\mathfrak{L}_{j,s}$ l'enveloppe linéaire dans $L^2(\Gamma)$ des fonctions

- $(x^{\alpha-1}, -x^{\alpha-1})\,\chi_j(x)$ si $\alpha \in l^-_{\omega_j}, 1/2 < \alpha < s+1/2$;
- $(x^{\alpha-1}\log x, -x^{\alpha-1}\log x)\,\chi_j(x)$ si $\alpha \in l^-_{\omega_j} \cap N$ et $1/2 < \alpha < s+1/2$;
- $(x^{\alpha-1}, x^{\alpha-1})\,\chi_j(x)$ si $\alpha \in l^+_{\omega_j}, 1/2 < \alpha < s+1/2$;
- $(x^{\alpha-1}\log x, x^{\alpha-1}\log x)\,\chi_j(x)$ si $\alpha \in l^+_{\omega_j} \cap N$ et $1/2 < \alpha < s+1/2$.

Si $s \geq 0$ tel que $s+1/2 \notin l^+_{\omega_j} \cup l^-_{\omega_j}$ pour tout $0 \le j \le M-1$, on considère les espaces

$$\mathsf{H}^s(\Gamma) = H_0^s(\Gamma) + \sum_{j=0}^{M-1}\chi_j\mathfrak{L}_{j,s},$$

où $H_0^s(\Gamma) = \left\{u \in L^2(\Gamma) : u_{|\Gamma_j} \in H_0^s(\Gamma_j)\right\}$ avec

$$H_0^s(\Gamma_j) = \left\{v \in L^2(\Gamma_j) : v \circ \sigma_j \in H_0^s(]0, L_j[)\right\}.$$

Ceux-ci ne dépendent évidemment pas du choix des fonctions de troncature χ_j. On peut définir une norme sur $\mathsf{H}^s(\Gamma)$ en choisissant dans $\mathfrak{L}_{j,s}$ une base $\{u_{j,k} : 0 \leq k, K_j\}$ pour tout $0 \leq j \leq M-1$. Si

$$f = g + \sum_{j=0}^{M-1} \chi_j \sum_{k=0}^{K_j-1} c_{jk} u_{jk}$$

où $g \in H_0^s(\Gamma)$, on pose

$$\|f\|^2_{\mathsf{H}^s(\Gamma)} = \|g\|^2_{H_0^s(\Gamma)} + \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K_j-1} |c_{jk}|^2 .$$

Muni de cette norme, $\mathsf{H}^s(\Gamma)$ est un espace de Hilbert.

THÉORÈME 14. *Soit Ω un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^2$, de frontière Γ. Avec les notations précédentes, si $s \geq 0$ est tel que $s + 1/2 \notin l^+_{\omega_j} \cup l^-_{\omega_j}$ pour tout $0 \leq j \leq M-1$, alors on a $Tf \in H^s_\pi(\Gamma)$ pour tout $f \in \mathsf{H}^s(\Gamma)$.*

De même, pour tout $f \in L^2(\Gamma)$ tel que $Tf \in H^s_\pi(\Gamma)$, on a $f \in \mathsf{H}^s(\Gamma)$.

DÉMONSTRATION. Soit $f \in \mathsf{H}^s(\Gamma)$. On prend $x_0 \in \Gamma$ et χ la restriction à Γ d'une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ qui vaut 1 au voisinage de x_0.

On a

$$Tf = T(\chi f) + T((1-\chi)f).$$

Le second terme est de classe C^∞ au voisinage de x_0 puisque $1-\chi$ est porté loin de x. Si x_0 n'est pas un sommet, on peut en outre imposer que $[\chi]$ est inclus dans l'intérieur relatif du côté Γ_j qui contient x_0. Le premier terme est alors H^s au voisinage de x_0 puisque

$$T(\chi f)_{|\Gamma_j} = -(1/2)\, H_+ \left((\chi f)_{|\Gamma_j}\right)$$

avec $(\chi f)_{|\Gamma_j} \in H_0^s(\Gamma_j)$.

Si $x_0 = P_j$, il vient, par le Théorème 9,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} T(\chi f)_{|\Gamma_{j-1}} \\ T(\chi f)_{|\Gamma_j} \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} H_+ & A \\ -A & -H_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\chi f)_{|\Gamma_{j-1}} \\ (\chi f)_{|\Gamma_j} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} H_+ g_{j-1} + A g_j \\ -A g_{j-1} - H_+ g_j \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha \in l^-_{\omega_j} \\ \frac12 < \alpha < s+\frac12}} c_\alpha \begin{pmatrix} (A - H_+)\, x^{\alpha-1}\chi_j \\ -(A - H_+)\, x^{\alpha-1}\chi_j \end{pmatrix} \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{\substack{\beta \in l^+_{\omega_j} \\ \frac12 < \beta < s+\frac12}} c_\beta \begin{pmatrix} (A + H_+)\, x^{\beta-1}\chi_j \\ -(A + H_+)\, x^{\beta-1}\chi_j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

qui apartient a $H^s(\mathbb{R}_+) \times H^s(\mathbb{R}_+)$ puisque génériquement, on a

$$\begin{pmatrix} (\chi f)_{|\Gamma_{j-1}} \\ (\chi f)_{|\Gamma_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{j-1} \\ g_j \end{pmatrix} + \sum_{\substack{\alpha \in l_{\omega_j}^- \\ \frac{1}{2}<\alpha<s+\frac{1}{2}}} c_\alpha \chi_j \begin{pmatrix} -x^{\alpha-1} \\ x^{\alpha-1} \end{pmatrix} + \sum_{\substack{\beta \in l_{\omega_j}^+ \\ \frac{1}{2}<\beta<s+\frac{1}{2}}} c_\beta \chi_j \begin{pmatrix} -x^{\beta-1} \\ x^{\beta-1} \end{pmatrix}$$

avec $g_{j-1}, g_j \in H_0^s(\mathbb{R}_+)$. Par conséquent, on peut montrer au moyen d'une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement ouvert du compact Γ que $Tf \in H_\pi^s(\Gamma)$.

Réciproquement, on considère $f \in L^2(\Gamma)$ tel que $Tf \in H_\pi^s(\Gamma)$. Soient $x_0 \in \Gamma$ et χ la restriction à Γ d'une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ qui vaut 1 au voisinage de x_0. Si x_0 n'est pas un sommet, on peut supposer en plus que $[\chi]$ est inclus dans l'intérieur relatif du côté Γ_j qui contient x_0. Dans un voisinage de x_0, on a

$$H_+(f_{|\Gamma_j})(x) = -(Tf)_{|\Gamma_j}(x) + \frac{1}{\pi} \sum_{k \neq j} \int_{\Gamma_k} \frac{(x-\xi) \cdot \tau_x}{|x-\xi|^2} f(\xi)\, d\sigma(\xi)$$

avec τ_x le vecteur tangent unitaire à Γ en x_0, orienté de P_j vers de P_{j+1}. Le premier terme appartient à $H^s(\Gamma_j)$ par hypothèse et le second terme est de classe C^∞ au voisinage de x_0. Dès lors, f est H_0^s dans un voisinage de x_0 par la Proposition 13. Si $x_0 = P_j$, on baptise f_j la restriction de f à Γ_j et f_{j-1} celle à Γ_{j-1}. Ces deux fonctions s'identifient respectivement à des fonctions définies sur $[0, L_j]$ et $[0, L_{j-1}]$, l'origine correspondant à P_j dans chaque cas. On note $\tilde{f}_j$ et $\tilde{f}_{j-1}$ leur prolongement par 0 dans $\mathbb{R}_+$. Il vient ainsi

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} H_+ & A \\ -A & -H_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_{j-1} \\ \tilde{f}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (Tf)_{|\Gamma_{j-1}} \\ (Tf)_{|\Gamma_j} \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k \neq j \\ k \neq j-1}} \int_{\Gamma_k} \frac{(x-\xi) \cdot \tau_x}{|x-\xi|^2} f(\xi)\, d\sigma(\xi).$$

Il est clair que $(F, G) \in (H^s(]0,\alpha[) \times H^s(]0,\beta[)) \cap (L^2(\mathbb{R}_+) \times L^2(\mathbb{R}_+))$ pour tous $0 < \alpha < L_{j-1}$ et $0 < \beta < L_j$. Par la formule d'inversion, on obtient donc

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_{j-1} \\ \tilde{f}_j \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (A + H_+)^{-1}(F - G) - (A - H_+)^{-1}(F + G) \\ (A + H_+)^{-1}(F - G) + (A - H_+)^{-1}(F + G) \end{pmatrix}$$

Comme $\chi(F \pm G) \in H^s(\mathbb{R}_+)$, on peut donc trouver, par la Proposition 12, une fonction ψ qui est la restriction à Γ d'un élément de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, telle que $\psi = 1$ au voisinage de P_j et $(\psi f_j, \psi f_{j-1}) \in \mathsf{H}^s(\Gamma)$. Au total, on a $f \in \mathsf{H}^s(\Gamma)$ en recourant comme ci-dessus à une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement ouvert de Γ. ■

La régularité de f_0 a été étudiée dans [2]. Rappelons-en les principales caractéristiques. On pose

$$\begin{aligned}
e_\omega^+ &= \{(2k+1)\pi/\omega : k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k\pi/(2\pi-\omega) : k \in \mathbb{N}\}, \\
e_\omega^- &= \{2k\pi/\omega : k \in \mathbb{N}\} \cup \{(2k+1)\,\pi/(2\pi-\omega) : k \in \mathbb{N}\}, \\
\mathcal{E} &= \{\omega \in]0, 2\pi[: \exists p \in \mathbb{N} : p+1/2 \in e_\omega^\pm\}.
\end{aligned}$$

On constate immédiatement que $e_\omega^+ \cup e_\omega^- = l_\omega^+ \cup l_\omega^-$. Soit χ_j une fonction définie sur Γ, qui est la restriction à Γ d'un élément de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et qui est égale à δ_{jk} au voisinage P_k pour tout $0 \le k \le M-1$. On désigne par x la distance à P_j et par (f,g) la fonction défine sur Γ dont la restriction à Γ_{j-1} est g et qui est nulle sur Γ_k pour tout $k \neq j$ et de $j-1$.

Pour tout $s \ge 0$ tel que $s + \frac{1}{2} \notin e_{\omega_j}^\pm$, on baptise $\chi_j \mathcal{L}_{j,s}$ l'enveloppe linéaire dans $L^2(\Gamma)$ des fonctions

- $(x^{\alpha-1}, -x^{\alpha-1})\,\chi_j\,(x)$ si $\alpha \in e_{\omega_j}^+, 1/2 < \alpha < s+1/2$,
- $(x^{\alpha-1}\log x, -x^{\alpha-1}\log x)\,\chi_j\,(x)$ si $\alpha \in e_{\omega_j}^+$ et $1/2 < \alpha < s+1/2$ et $\alpha = p+1/2$ avec $p \in \mathbb{N}_0$,
- $(x^{\alpha-1}, x^{\alpha-1})\,\chi_j\,(x)$ si $\alpha \in e_{\omega_j}^-, 1/2 < \alpha < s+1/2$,
- $(x^{\alpha-1}\log x, x^{\alpha-1}\log x)\,\chi_j\,(x)$ si $\alpha \in e_{\omega_j}^- \cap N$ et $1/2 < \alpha < s+1/2$ et $\alpha = p+1/2$ avec $p \in \mathbb{N}_0$.

Dans ces conditions, on démontre que $f_0 \in H_0^s(\Gamma) + \sum_{j=0}^{M-1} \chi_j \mathcal{L}_{j,s}$ pour tout $s \ge 0$ tel que $s + 1/2 \notin e_{\omega_j}^+ \cup e_{\omega_j}^-$ pour tout $j = 0, \ldots, M-1$.

THÉORÈME 15. *Soit Ω un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^2$, de frontière Γ. Avec les notations précédentes, si $s \ge 0$ est tel que $s+1/2 \notin l_{\omega_j}^+ \cup l_{\omega_j}^-$ pour tout $0 \le j \le M-1$, alors l'opérateur T est continu de $\mathsf{H}^s(\Gamma)$ dans $H_\pi^s(\Gamma)$. En particulier, l'opérateur T est un isomorphisme de $\mathsf{H}^s(\Gamma) \cap L_0^2(\Gamma)$ dans $H_\pi^s(\Gamma) \cap L_0^2(\Gamma)$.*

DÉMONSTRATION. Comme T est continu de $L^2(\Gamma)$ dans lui-même, la preuve de la première partie découle immédiatement du Théorème 14 et du théorème du graphe fermé.

On procède de façon identique pour la seconde partie en notant que T est un isomorphisme de $L_0^2(\Gamma)$ dans lui-même. ■

COROLLAIRE 16. *Soit Ω un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^2$, de frontière Γ. Avec les notations précédentes, si $s \ge 0$ est tel que $s+1/2 \notin l_{\omega_j}^+ \cup l_{\omega_j}^-$ pour tout $0 \le j \le M-1$, alors l'opérateur U est un isomorphisme de $\mathsf{H}^s(\Gamma) \cap L_0^2(\Gamma)) + \rangle f_0 \langle$ dans $H_\pi^s(\Gamma)$.*

DÉMONSTRATION. La Proposition 2 montre que U est un isomorphisme de $L^2(\Gamma)$ dans lui-même. Traitons le cas général. Par le Théorème 15, l'opérateur U agit continûment de $\mathsf{H}^s(\Gamma)$ dans $H^s_\pi(\Gamma)$.

Réciproquement, pour tout $g \in H^s_\pi(\Gamma)$, on écrit $U^{-1}g = f + cf_0$ en prenant

$$c = \frac{1}{\mathrm{mes}\,(\Gamma)} \int_\Gamma g d\sigma.$$

On a donc $Tf = g - c \in H^s_\pi(\Gamma) \cap L^2_0(\Gamma)$ de sorte que $f \in \mathsf{H}^s(\Gamma) \cap L^2_0(\Gamma)$. Dès lors, on obtient $\mathcal{T}^{-1}g \in \mathsf{H}^s(\Gamma) \cap L^2_0(\Gamma)) + \rangle f_0 \langle$. ■

Ceci nous permet d'améliorer le Corollaire 3.

COROLLAIRE 17. *Soit Ω un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^2$, de frontière Γ et $s \geq 0$ tel que $s + 1/2 \notin l^+_{\omega_j} \cup l^-_{\omega_j}$ pour tout $0 \leq j \leq M-1$. Pour tout $g \in H^{s+1}(\Gamma)$, l'unique solution $f \in L^2(\Gamma)$ de l'équation $Sf = g$ s'écrit sous la forme $h + \lambda f_0$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $h \in \mathsf{H}^s(\Gamma) \cap L^2_0(\Gamma)$ est l'unique solution de l'équation $Th = Dg$.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence directe du Corollaire 3 et du Théorème 15. Si $g \in H^{s+1}(\Gamma)$, on a $Dg \in H^s_\pi(\Gamma) \cap L^2_0(\Gamma)$. Dès lors, il existe un et un seul $h \in \mathsf{H}^s(\Gamma) \cap L^2_0(\Gamma)$ tel que $Th = Dg$. Si $f \in L^2(\Gamma)$ est l'unique solution de l'équation $Sf = g$, alors $f - h \in \ker T$, ce qui permet de conclure. ■

2.4. OPÉRATEURS DE CONVOLUTION DE MELLIN

Ici, nous rappellons certains résultats de base sur les opérateurs de convolution de Mellin sur la demi-droite.

DÉFINITION 18. *La transformation de Mellin de une fonction $f \in \overline{C_0^\infty}(\mathbb{R}^+)$ est définie par*

$$\mathcal{M}f(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} f(x)\, dx \tag{2.2}$$

par $\mathrm{Re}\, z > 0$. *Elle satisfait*

$$z\mathcal{M}f(z) = -\mathcal{M}Df(z+1)$$

et elle peut être prolongé comme une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec des pôles simples dans $0, -1, -2, \ldots$ Le résidu en $-k$ est $D^k f(0)/k!$

Pour une fonction $a(z) \in L^\infty(\mathrm{Re}\, z = 1/2)$, l'opérateur (pseudodifférentiel) de Mellin $\mathfrak{A}$ avec symbole $\sigma[\mathfrak{A}](z) = a(z)$ est défini par

$$\mathfrak{A}v(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\, z = 1/2} s^{-z}\, a(z)\, \tilde{v}(z)\, dz, \qquad v \in L^2(\mathbb{R}^+). \tag{2.3}$$

Alors $\mathfrak{A}$ est un opérateur continu dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ et sa norme est bornée par

$$\|\mathfrak{A}\| \leq \sup_{\mathrm{Re}\, z = 1/2} |a(z)|. \tag{2.4}$$

Si $\mathfrak{B}$ est un autre opérateur de Mellin avec symbole b, alors $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ est évidemment un opérateur de Mellin qui a comme symbole ba. Particulièrement, si le symbole de $\mathfrak{A}$ satisfait l'estimation

$$|a(z)| \geq c > 0, \qquad \operatorname{Re} z = 1/2,$$

alors $\mathfrak{A}$ est invertible continûment dans $L^2(\mathbb{R}^+)$, où son inverse est l'opérateur de Mellin avec symbole $1/a$.

On dira que le symbole $a(z)$ est de classe $\Sigma^{-\infty}$ s'il est analytique dans la bande $0 < \operatorname{Re} z < 1$ et si, les estimations

$$a(z) = O\left((1+|z|)^{-k}\right), \quad |z| \to \infty, \, k \in \mathbb{N}_0$$

ont lieu uniformément dans chaque sous-bande $\delta < \operatorname{Re} z < 1 - \delta$, $\delta \in (0, 1/2)$. Si $a \in \Sigma^{-\infty}$, alors la fonction noyau $\kappa(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, définie par

$$\kappa(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = \delta} x^{-z} a(z) \, dz, \quad 0 < \delta < 1, \tag{2.5}$$

satisfait les estimations

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left| x^{\rho+k} D^k \kappa(x) \right| < \infty, \tag{2.6}$$

pour tous $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \rho < 1$.

Ceci est une conséquence de l'analyticité et la décroissance à l'infini du symbole. D'ailleurs, l'opérateur $\mathfrak{A}$ avec symbole $a \in \Sigma^{-\infty}$ peut s'écrire comme une convolution de Mellin

$$\mathfrak{A}v(s) = \int_0^\infty \kappa(s/\sigma) \, v(\sigma) \, \frac{d\sigma}{\sigma},$$

et le symbole est la transformée de Mellin de la fonction noyau

$$a(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \kappa(x) \, dx \tag{2.7}$$

L'opérateur singulier de Cauchy sur $\mathbb{R}^+$

$$\mathfrak{H}[v](s) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{v(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma,$$

est un opérateur de Mellin avec symbole $\sigma[\mathfrak{H}](z) = \cot z$ qui est analytique pour $0 < \operatorname{Re} z < 1$ et il satisfait les estimations

$$\sigma[\mathfrak{H}]\ (z) = \mp i + O\left((1+|z|)^{-k}\right), \tag{2.8}$$

$\operatorname{Im} z \to \pm\infty$, $k \in \mathbb{N}_0$ uniformément dans chaque sous-bande $\delta < \operatorname{Re} z < 1 - \delta$, $\delta > 0$. (Voir [6]).

Soit ψ une fonction régulière à support compact sur $[0, \infty)$. Si $a \in \Sigma^{-\infty}$ ou $a(z) \in \cot \pi z$ et $\mathfrak{A}$ est le opérateur correspondant de Mellin (2.3), alors le commutateur $\psi\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\psi$ est compact sur $L^2(\mathbb{R}^+)$. Pour $a \in \Sigma^{-\infty}$, l'opérateur $\psi\mathfrak{A}$ est compact dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ si de plus $0 \notin \operatorname{supp} \psi$.

3. La méthode de collocation

On considère une méthode de collocation utilisant des splines de degré k pour résoudre l'équation intégrale

$$-\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \log|x-\xi|\ u(\xi)\ d\Gamma(\xi) = f(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{3.1}$$

où Γ est la frontière d'un polygone Ω de $\mathbb{R}^2$, $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ est donnée et $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ est inconnu. C'est une des équations intégrales les plus simples dans la théorie du potentiel dans $\mathbb{R}^2$.

La difficulté principale dans l'analyse de la méthode pour la résolution de (3.1) est de prouver la stabilité, c'est-à-dire, démontrer que la discrétisation de l'opérateur intégral a un inverse borné dans un cadre approprié. Ceci est connu si Γ est une courbe régulière (voir [1] et [23]) mais les méthodes de démonstration ne sont pas applicables à un polygone.

3.1. Description de la méthode

Notons par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs et $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. On suppose que la capacité logarithmique de Γ est différente de 1. Soient $P_0, P_1, \ldots, P_M$ les sommets de Γ et pour tout ℓ, $1 \le \ell \le M$, l'angle intérieur entre les côtés $P_\ell - P_{\ell-1}$ et $P_{\ell+1} - P_\ell$, est $\omega_\ell = (1+\chi_\ell)\pi$. Soit $\hat{y}_\ell$ le vecteur unitaire dans la direction $P_\ell - P_{\ell-1}$. Le côté qui va de $P_{\ell-1}$ a P_ℓ est noté Γ_ℓ, $|\Gamma_\ell| = |P_\ell - P_{\ell-1}|$ désigne sa longueur et $|\Gamma|$ la longueur de Γ.

Soit $\gamma : [-\pi,\pi] \to \Gamma$ le paramétrage de Γ proportionnel à la longueur d'arc, c'est-à-dire $|\gamma'(s)| \equiv a = |\Gamma|/(2\pi)$. L'équation (3.1) se transforme en

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\gamma(s)-\gamma(\xi)|\, w(\xi)\, d\xi = g(s), \qquad s \in [-\pi,\pi], \tag{3.2}$$

avec

$$w(\xi) = a\, u(\gamma(\xi)), \quad g(s) = f(\gamma(s)). \tag{3.3}$$

Cette équation peut s'écrire de manière abrégée sous la forme

$$Sw = g. \tag{3.4}$$

Soit S l'opérateur

$$\mathsf{S}v(s) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|2\sin(s-\xi)/2|\, v(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(\xi)\, d\xi. \tag{3.5}$$

Le premier terme est l'opérateur S quand Γ est le cercle unitaire paramétré par $\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$. Le deuxième est une perturbation compacte. L'opérateur S est inversible (dans un espace approprié), et (3.4) peut s'écrire

$$\left(I + \mathsf{S}^{-1}(S-\mathsf{S})\right) w = \mathsf{S}^{-1} g.$$

Pour $\ell = 1, 2, \ldots, M$, on définit

$$\gamma(s) = P_{\ell-1} - a(S_\ell - s)\,\hat{y}_\ell, \qquad s \in [S_{\ell-1}, S_\ell]. \tag{3.6}$$

Pour ϵ tel que $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, soit λ une fonction régularisante qui a $(k+1)$ dérivées continues, qui vérifie

$$\lambda(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } s \leq \epsilon, \\ \\ 0, & \text{si } s \geq 1 - \epsilon, \end{cases}$$

et

$$D^j\lambda(\epsilon) = 0 = D^j\lambda(1-\epsilon), \qquad k+1 \geq j \geq 1,$$

et qui est strictement décroissante dans $[S_{\ell-1}+\epsilon, S_\ell - \epsilon]$.

Associé à chaque sommet P_ℓ, on a les ensembles

$$\begin{aligned} e^+_{\omega_\ell} &= \{(2k+1)\pi/\omega_\ell : k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k\pi/(2\pi - \omega_\ell) : k \in \mathbb{N}\}, \\ e^-_{\omega_\ell} &= \{2k\pi/\omega_\ell : k \in \mathbb{N}\} \cup \{(2k+1)\pi/(2\pi - \omega_\ell) : k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

On pose $\alpha_\ell = \beta_\ell - 1$ où $\beta_\ell \in e^+_{\omega_\ell} \cup e^-_{\omega_\ell}$ et $\beta_\ell > 1/2$.

On choisira un vecteur $\overrightarrow{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_M)^T$ d'exposants, $\overrightarrow{q} \geq (1, 1, \ldots, 1)^T$. Soient $\{S_\ell\}_{\ell=0}^{M-1}$ les préimages par γ des sommets de Γ, c'est-à-dire, $\gamma(S_\ell) = P_\ell$ pour tout ℓ.

Le découpage Δ est défini sur chaque côté Γ_ℓ de Ω par

$$s_k = S_{\ell-1} + \left\{ \left[1 - \lambda\left(\frac{k}{N_\ell}\right)\right] \left(\frac{k}{N_\ell}\right)^{q_{\ell-1}} + \lambda\left(\frac{N_\ell - k}{N_\ell}\right)\left(\frac{N_\ell - k}{N_\ell}\right)^{q_\ell} \right\} (S_\ell - S_{\ell-1}),$$

$k = 0, 1, \ldots, N_\ell - 1$,où N_ℓ est la quantité de points sur Γ_ℓ. Les points moyens de chaque sous-intervalle sont

$$t_\ell = (s_{\ell+1} + s_\ell)/2, \qquad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Pour chaque $k \geq 0$, soit S^k_Δ l'espace de splines de degré k subordonnés au découpage Δ. Plus précisément, on a $v \in S^k_\Delta$ si et seulement si v est 2π-périodique, v est un polynôme de degré k sur chaque $[s_{\ell-1}, s_\ell]$ et v a $(k-1)$ dérivées continues dans $[-\pi, \pi]$. Pour tout $v : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, on définit l'interpolant $Q_\Delta v \in S^k_\Delta$ de v dans S^k_Δ par

- si k est impair, alors $Q_\Delta v(s_\ell) = v(s_\ell)$, $\ell = 1, 2, \ldots, N$,
- si k est pair, alors $Q_\Delta v(t_\ell) = v(t_\ell)$, $\ell = 0, 1, \ldots, N-1$.

La méthode de collocation consiste à chercher $w_\Delta \in S^k_\Delta$ tel que

$$Q_\Delta S w_\Delta = Q_\Delta g. \tag{3.7}$$

Pour $i^* \leq (1/2)\min_\ell\{N_\ell\}$, considérons la méthode

$$Q_\Delta S^{i^*h} w_\Delta = Q_\Delta g, \tag{3.8}$$

avec

$$S^{i^*h} = \mathsf{S} + (S - \mathsf{S})\, T^{i^*h},$$

où $h = \min_\ell \{s_{\ell+1} - s_\ell\}$ et T^τ est l'opérateur de troncature défini par

$$T^\tau v\,(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \in [S_\ell - \tau, S_\ell + \tau]\,, \qquad \ell = 1, \ldots, M, \\ v(s), & \text{si non.} \end{cases} \tag{3.9}$$

Quand $i^* = 0$, $S^{i^*h} = S$, si $i^* > 0$, le noyau de S, $\log|\gamma(s) - \gamma(\sigma)|$, est remplacé par le noyau de S, $\log\left|2e^{1/2}\sin(s-\sigma)/2\right|$ si $\sigma \in \cup_{\ell=1}^{M} [S_\ell - i^*h, S_\ell + i^*h]$. Avec cette notation, nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME 19. *Soient Ω un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^2$ et Γ sa frontière , $g \in H^s(\Gamma)$, $s \geq 0$ tel que $s + 1/2 \notin e^+_{\omega_\ell} \cup e^-_{\omega_\ell}$ pour $\ell = 0, \ldots M-1$, $q_\ell(\alpha_\ell + 1/2) > (k+1)$ et w la solution de $Sw = g$. Si $\omega_j \notin \mathcal{E}$ pour tout j alors, pour $k = 0, 1, 2, 3$, il existe $i^* > 0$ tel que* (3.8) *admette une solution unique w_Δ pour tout N suffisamment grand qui vérifie*

$$\|w - w_\Delta\|_0 \leq C\, N^{-(k+1)},$$

avec C une constante qui dépend de w et i^* mais est indépendante de N.

Si un des ω_j appartient à $\mathcal{E}$ il faut remplacer cette estimation par

$$\|w - w_\Delta\|_0 \leq C\, N^{-(k+1)} \log N.$$

3.2. RÉSULTATS ANALYTIQUES

Dans cette section on donnera quelques résultats analytiques sur l'opérateur S et l'opérateur $\mathsf{S}^{-1}S$ qui sont nécessaires pour prouver la stabilité et la convergence de la méthode de collocation.

De [27], on a

$$\mathsf{S}^{-1} v\,(s) = -HD\,[v]\,(s) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v\,(\sigma)\; d\sigma, \tag{3.10}$$

où D est l'opérateur de différentiation et H est l'opérateur intégral singulier de Hilbert périodique défini par

$$Hv\,(s) = -\frac{1}{2\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\pi}^{\pi} \cot\left[(s-\sigma)/2\right] v\,(\sigma)\; d\sigma.$$

En vertu de (3.10), nous avons

$$\mathsf{S}^{-1}S = I + B + E, \tag{3.11}$$

avec $B = -HD\,(S - \mathsf{S})$. Ici, E désigne un opérateur compact générique dont la valeur peut changer de ligne en ligne.

THÉORÈME 20. *L'opérateur B peut s'écrire $B=\sum_{j=1}^{M} B_j + E$, avec*

$$B_j v(s) = \begin{cases} \displaystyle\int_{S_j-\epsilon}^{S_j} b_j^{--}\left(\frac{S_j-s}{S_j-\sigma}\right)\frac{v(\sigma)}{(S_j-\sigma)}d\sigma + \int_{S_j-\epsilon}^{S_j} b_j^{-+}\left(\frac{S_j-s}{\sigma-S_j}\right)\frac{v(\sigma)}{(\sigma-S_j)}d\sigma, \\ \hfill si\ S_j-\epsilon \le s \le S_j; \\ \displaystyle\int_{S_j}^{S_j+\epsilon} b_j^{+-}\left(\frac{s-S_j}{S_j-\sigma}\right)\frac{v(\sigma)}{(S_j-\sigma)}d\sigma + \int_{S_j}^{S_j+\epsilon} b_j^{+-}\left(\frac{s-S_j}{S_j-\sigma}\right)\frac{v(\sigma)}{(S_j-\sigma)}d\sigma, \\ \hfill si\ S_j \le s \le S_j+\epsilon; \end{cases}$$

et $b_j^{\mp\mp}$ sont des fonctions qui satisfont les estimations

$$\sup_{\mathbb{R}^+}\left|x^{k+\rho}D^k b_j^{\mp\mp}(x)\right| < \infty,$$

pour $k\in\mathbb{N}_0$ et $\rho\in(0,1)$.

Pour prouver ce résultat, nous utilisons une procédure de localisation. Nous étudions l'opérateur de convolution de Mellin B_j sur la demi-droite, qui modélise le comportement local de B au voisinage du sommet P_j.

Soit ϵ tel que

$$0<\epsilon<\frac{1}{2}\min\{S_j-S_{j-1} : j=1,\dots,M\}$$

et soient ψ_j, ψ_j' deux fonctions 2π -périodiques non-négatives de classe C^∞ telles que $\psi_j\equiv 1$ dans un voisinage de S_j, $\psi_j'\equiv 1$ dans un voisinage de supp ψ_j et supp $\psi_j'\subset[S_j-\epsilon,S_j+\epsilon]$.
Montrons que

$$B=\sum_{j=1}^{M}\psi_j H\psi_j' D(\mathrm{S}-S)\psi_j + E \tag{3.12}$$

Pour vérifier (3.12), rappelons que

$$\begin{aligned} D(S-\mathrm{S})v(s) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial s}\log\left|e^{\frac{1}{2}}\frac{\gamma(s)-\gamma(\sigma)}{2\sin[(s-\sigma)/2]}\right| v(\sigma)\,d\sigma \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\cot[(s-\sigma)/2]+c(s,\sigma)\right\}v(\sigma)\,d\sigma, \end{aligned} \tag{3.13}$$

où, pour $s=S_j, j=0,\dots,M$,

$$c(s,\sigma)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\gamma_1'(s)[\gamma_1(s)-\gamma_1(\sigma)]}{\|\gamma(s)-\gamma(\sigma)\|^2}+\frac{\gamma_2'(s)[\gamma_2(s)-\gamma_2(\sigma)]}{\|\gamma(s)-\gamma(\sigma)\|^2}\right].$$

Ici, γ_1 et γ_2 sont les composantes du paramétrage γ défini dans (3.6). Puisque γ est un paramétrage C^2 dans chaque intervalle (S_{j-1}, S_j), le noyau de $D(S - \mathsf{S})$ est uniformement borné en s et σ hors d'un voisinage de l'ensemble $\{(-\pi,\pi) \cup (\pi,-\pi)\} \cup \{(S_j, S_j) : j = 0, \ldots, M\}$ par une constante positive. Dès lors, on a

$$D(S - \mathsf{S}) = \sum_{j=1}^{M} D(S - \mathsf{S})\psi_j + E = \sum_{j=1}^{M} \psi_j D(S - \mathsf{S})\psi_j + E.$$

A partir de (3.11), nous avons

$$B = -\sum_{j=1}^{M} H\psi_j D(S - \mathsf{S})\psi_j + E.$$

Si on utilise l'identité $\psi_j = \psi_j \psi'_j$ et le fait que $\psi_j H - H\psi$ est un opérateur intégral à un noyau régulier, (3.12) s'ensuit.

Maintenant, on regarde en détail chaque terme de la somme (3.12). Ceci représente la partie principale de B dans un voisinage du j-ième sommet. Sans perte de généralité, on peut supposer que $P_j = 0$ et que $S_j = 0$. Dans ce cas, le paramétrage prend la forme

$$\gamma(s) = \begin{cases} a(-s)(\cos\chi\pi, \sin\chi\pi), & s \in [\epsilon, 0]; \\ a(s, 0), & s \in [0, \epsilon]; \end{cases} \tag{3.14}$$

où, par convention, on écrira χ pour χ_j. Par construction des fonctions de troncature, on a

$$\operatorname{supp}\psi_j \subset \operatorname{supp}\psi'_j \subset [S_{j-\epsilon}, S_{j+\epsilon}] = [\epsilon, \epsilon].$$

Remarquons que

$$\frac{1}{2\pi}\cot\frac{s-\sigma}{2} - \frac{1}{\pi}\frac{1}{s-\sigma}$$

est une fonction régulière dans $(-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi)$. Par conséquent, en utilisant (3.13), nous obtenons

$$D(\mathsf{S} - S)\psi = (\mathfrak{H} - \mathfrak{C})\psi + E,$$

où E est un opérateur compact,

$$\mathfrak{H}v(s) = -\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\sigma)}{s-\sigma} d\sigma$$

est l'opérateur singulier de Cauchy sur $\mathbb{R}$ et

$$\mathfrak{C}v(s) = \int_{-\infty}^{\infty} c(s,\sigma)\, v(\sigma)\, d\sigma,$$

avec $c(s,\sigma)$ défini dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en utilisant l'extension de (3.14) pour tout $\mathbb{R}$. Ainsi, il vient

$$\psi H\psi' D(\mathsf{S} - S)\psi = \psi\mathfrak{H}\psi'(\mathfrak{H} - \mathfrak{C}) + E. \tag{3.15}$$

En vertu de (3.13) et (3.14), nous avons

$$c(s,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{s-\sigma}, & s\sigma > 0; \\ \\ \dfrac{1}{\pi}\dfrac{s+\sigma\cos\chi\pi}{(s^2+\sigma^2+2s\sigma\cos\chi\pi)}, & s\sigma < 0; \end{cases} \tag{3.16}$$

Pour étudier les opérateurs $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{C}$ dans $L^2(\mathbb{R})$, nous les identifions avec les matrices de 2×2 de convolution de Mellin des opérateurs $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$ qui agissent sur $L^2(\mathbb{R}^+)\times L^2(\mathbb{R}^+)$. Pour ce faire, on introduit l'isométrie $\Pi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}^+)\times L^2(\mathbb{R}^+)$ définie par

$$\Pi v(s) = (v(s), v(-s))^T, \quad s\in\mathbb{R}^+.$$

Au lieu de considérer les opérateurs $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{C}$, nous considérons leurs équivalents

$$\mathcal{H} = \Pi\mathfrak{H}\Pi^{-1}, \quad \mathcal{C} = \Pi\mathfrak{C}\Pi^{-1} \tag{3.17}$$

dans $L^2(\mathbb{R}^+)\times L^2(\mathbb{R}^+)$.

LEMME 21. *$\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$ sont des opérateurs de convolution de Mellin et leurs symboles sont*

$$\sigma(\mathcal{H})(z) = \begin{bmatrix} \cot\pi z & -\dfrac{1}{\sin\pi z} \\ \\ \dfrac{1}{\sin\pi z} & -\cot\pi z \end{bmatrix},$$

et

$$\sigma(\mathcal{C})(z) = \begin{bmatrix} \cot(\pi[z-1]) & \dfrac{\cos[\chi\pi(z-1)]}{\sin[\pi(z-1)]} \\ \\ -\dfrac{\cos[\chi\pi(z-1)]}{\sin[\pi(z-1)]} & -\cot[\pi(z-1)] \end{bmatrix}.$$

DÉMONSTRATION. Pour vérifier la première formule, observons que $\mathcal{H}$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)\times L^2(\mathbb{R}^+)$ peut s'écrire comme une matrice d'opérateurs de convolution de Mellin de noyau

$$\frac{1}{\pi}\begin{bmatrix} (1-x)^{-1} & -(1+x)^{-1} \\ \\ (1+x)^{-1} & -(1-x)^{-1} \end{bmatrix}.$$

La fonction $\frac{1}{\pi}(1-x)^{-1}$ est le noyau de l'opérateur singulier de Cauchy sur $\mathbb{R}^+$, et sa transformée de Mellin est $\cot\pi z$. La transformée de Mellin de $\frac{1}{\pi}(1+x)^{-1}$ est $1/\sin\pi z$, et la première partie du lemme est démontrée. Pour obtenir la deuxième partie, on écrit $\mathcal{C}$ de façon similaire comme un opérateur de convolution de Mellin à valeur matricielle, de noyau

$$c(x) = \begin{bmatrix} c_{++}(x) & c_{+-}(x) \\ \\ c_{-+}(x) & c_{--}(x) \end{bmatrix}$$

où, en vertu de (3.16), nous avons

$$c_{--}(x) = -c_{++}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x-1},$$

et

$$c_{+-}(x) = -c_{-+}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x+\cos\chi\pi}{1+x^2+2x\cos\chi\pi}.$$

Nous obtenons

$$\tilde{c}_{++}(z) = -\tilde{c}_{--}(z) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\sim}(z) = \cot(\pi(z-1)).$$

De plus, comme

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{x+\cos\chi\pi}{1+x^2+2x\cos\chi\pi}\right)^{\sim}(z) = \frac{\cos[\chi\pi(z-1)]}{\sin\pi z},$$

on a

$$\tilde{c}_{+-}(z) = -\frac{\cos[\chi\pi(z-1)]}{\sin(\pi z)} = -\tilde{c}_{-+}(z),$$

ce qui achève la démonstration. ■

Démonstration du Théorème 20. Il suffit de démontrer l'affirmation dans un voisinage $[-\epsilon,\epsilon]$ du sommet $S_j = 0$ (avec le paramétrage donné par (3.14)). A partir de (3.15) et de (3.17), nous avons

$$\begin{aligned} \psi H\psi' D(\mathsf{S}-S)\psi &= \psi\, \Pi^{-1}\mathcal{H}\Pi\psi'\Pi^{-1}(\mathcal{H}-\mathcal{C})\,\Pi\psi + E \\ &= \psi\Pi^{-1}\mathcal{H}(\mathcal{H}-\mathcal{C})\,\Pi\psi + E. \end{aligned} \tag{3.18}$$

(pour la dernière égalité, on a utilisé le fait que $\psi'\Pi^{-1}(\mathcal{H}-\mathcal{C})\ \Pi - \Pi^{-1}(\mathcal{H}-\mathcal{C})\,\Pi\psi'$ est un opérateur compact et que $\psi'\psi = \psi$). En utilisant le Lemme 21 et l'équation (2.21), il est facile de vérifier que le symbole $(\mathcal{H}-\mathcal{C})$ est de classe $\Sigma^{-\infty}$. Etant donné que $\sigma[\mathcal{H}](z)$ est borné dans chaque bande $\delta < \mathrm{Re}\, z < 1-\delta$, $\delta \in (0,1)$, on a

$$\sigma[\mathcal{H}(\mathcal{H}-\mathcal{C})] = \sigma[\mathcal{H}]\ \sigma[\mathcal{H}-\mathcal{C}] \in \Sigma^{-\infty}.$$

Par conséquent, le noyau de convolution $\mathcal{H}(\mathcal{H}-\mathcal{C})$ satisfait aux estimations (2.19). En évaluant (3.18) pour $s \in [-\epsilon, 0]$ et $s \in [0,\epsilon]$, nous obtenons un développement local de $B_j v$ sous la forme voulue.

Pour un sommet $S_j \neq 0$ quelconque, la procédure est exactement la même à l'exception de la définition de Π. Dans ce cas, on pose

$$\Pi_j v(s) = (v(s-S_j), v(S_j-s)),$$

$s \in \mathbb{R}^+$. ■

Considérons l'opérateur $I + \mathcal{B}$ avec

$$\mathcal{B} = \mathcal{H}\ (\mathcal{H}-\mathcal{C}). \tag{3.19}$$

Par (3.17) et (3.18), $\mathcal{B}$ peut être consideré comme la partie non-compacte de l'opérateur B dans un voisinage du point $S_j = 0$.

LEMME 22. *Il existe une constante c, telle que* $|\det(I+\sigma[\mathcal{B}](z))| \geq c > 0$, *si* $\operatorname{Re} z = 1/2$.

DÉMONSTRATION. Remarquons que

$$\begin{aligned}
\det(I+\sigma[\mathcal{B}]) &= \det(I+\sigma[\mathcal{H}(\mathcal{H}-\mathcal{C})]) \\
&= \det(I+\sigma[\mathcal{H}]\,\sigma[\mathcal{H}]-\sigma[\mathcal{H}]\,\sigma[\mathcal{C}]) \\
&= \det(-\sigma[\mathcal{H}]\,\sigma[\mathcal{C}]) \\
&= \det(\sigma[\mathcal{C}]),
\end{aligned}$$

parce que $\sigma(\mathcal{H})\,\sigma(\mathcal{H}) = -I$ et $\det\sigma(\mathcal{H}) \equiv 1$. Il suffit donc de vérifier que

$$|\det(\sigma[\mathcal{C}](z))| \geq c > 0, \quad \operatorname{Re} z = 1/2.$$

A partir du Lemme 21, nous avons pour $z = 1/2 + i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$

$$\det\left(\sigma[\mathcal{C}]\left(\tfrac{1}{2}+i\xi\right)\right) = \frac{\cos^2(\chi\pi(i\xi-1/2)) - \cos^2(\pi(i\xi-1/2))}{\sin^2(\pi(i\xi-1/2))}.$$

Il est facile de montrer que, comme $|\chi| < 1$,

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \det(\sigma[\mathcal{C}](1/2+\xi i)) = 1.$$

Il suffit de vérifier

$$\varDelta(\xi) = \cos^2(\chi\pi(i\xi-1/2)) - \cos^2(\pi(i\xi-1/2)) \neq 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{3.20}$$

Pour cela, observons que

$$\varDelta(\xi) = (\cosh(\chi\pi\xi)\cos(\chi\pi/2) + i\sinh(\chi\pi\xi)\sin(\chi\pi/2))^2 - (i\sinh\pi\xi)^2,$$

est le produit des facteurs

$$\begin{aligned}
I_\pm &= (\cosh(\chi\pi\xi)\cos(\chi\pi/2) \pm i\cosh\pi\xi\cos(\chi\pi/2))^2 \\
&\quad + i(\sinh(\chi\pi\xi)\sin(\chi\pi/2) \pm i\sinh(\pi\xi))^2.
\end{aligned}$$

Si $|\chi| < 1$, nous avons $\operatorname{Re} I_+ > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. D'autre part, on a

$$\operatorname{Im} I_- = \operatorname{sign}(\xi)\,[\sinh(|\chi|\,\pi\,|\xi|)\sin(|\chi|\,\pi/2) - \sinh(\pi\,|\xi|)],$$

et on conclut que $\operatorname{Im} I_- \neq 0$ sauf si $\xi = 0$. Or, $\operatorname{Re} I_- \neq 0$ si $\xi = 0$, donc (3.20) s'ensuit.
■

3.3. Résultat de coercivité

L'analyse de la méthode de collocation dans la section suivante dépend de la stabilité d'une approximation de "section finie"de l'opérateur $I+\mathsf{S}^{-1}(S-\mathsf{S}) = \mathsf{S}^{-1}S$. Pour définir cette approximation, on utilise, pour $\tau < (1/2)\min\{S_j - S_{j-1} : j = 1, \ldots, M\}$, l'opérateur de troncature T^τ défini dans (3.9). L'approximation de section finie est définie par $I + \mathsf{S}^{-1}(S-\mathsf{S})T^\tau$. La stabilité s'obtient dans le théorème suivant.

Théorème 23. *Il existe $C > 0$ et $\tau_0 > 0$ tels que*

$$\left\|(I + \mathsf{S}^{-1}(S-\mathsf{S})T^\tau)v\right\|_0 \geq C\,\|v\|_0,$$

pour tous $v \in H^0, 0 < \tau \leq \tau_0$.

Remarque 24. *Observons que, pour τ fixé, l'opérateur $I + \mathsf{S}^{-1}(S-\mathsf{S})T^\tau$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. L'inégalité antérieure montre que cet opérateur est inversible et qu'il a un inverse uniformément borné pour tout $\tau \in (0, \tau_0]$.*

Démonstration. Par simplicité, nous écrivons $M = \mathsf{S}^{-1}(S-\mathsf{S})$. Pour démontrer le théorème, observons d'abord que le résultat est vrai si nous pouvons montrer que

$$\|T^\tau(I+M)T^\tau v\|_0 \geq C\,\|T^\tau v\|_0, \qquad \text{pour } v \in H^0 \text{ et } 0 < \tau \leq \tau_0. \tag{3.21}$$

Pour voir ceci, remarquons que le noyau $\ker(I-T^\tau) \times \ker T^\tau$, muni de la norme

$$\left\|(u,v)^T\right\| = \left\{\|u\|_0^2 + \|v\|_0^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

est isométriquement isomorphe à H^0 par l'application

$$v \to (T^\tau v, (I-T^\tau)v)^T.$$

De même, l'application $v \to (I + MT^\tau)v$ peut être représentée par l'opérateur matriciel

$$\begin{bmatrix} T^\tau v \\ (I-T^\tau)v \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} T^\tau(I+M)T^\tau & 0 \\ (I-T^\tau)MT^\tau & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T^\tau v \\ (I-T^\tau)v \end{bmatrix}$$

Si (3.21) est vrai pour tout $\tau \leq \tau^0$ l'opérateur

$$T^\tau(I+M)T^\tau|_{\ker(I+T^\tau)}$$

est inversible dans $\ker(I-T^\tau)$, avec un inverse borné indépendamment de τ. L'application $v \to (I+MT^\tau)v$ est donc inversible et son inverse est repré senté par

$$\begin{bmatrix} T^\tau v \\ (I-T^\tau)v \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} (T^\tau(I+M)T^\tau)^{-1} & 0 \\ -(I-T^\tau)MT^\tau[T^\tau(I+M)T^\tau]^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T^\tau v \\ (I-T^\tau)v \end{bmatrix}$$

Cet inverse est borné dans $\ker(I-T^\tau) \times \ker T^\tau$ indépendamment de τ et le théorème s'ensuit.

Pour obtenir (3.21), il suffit de vérifier l'estimation d'ellipticité forte

$$\operatorname{Re}\langle (I + M + E_0)\, v, v\rangle \geq C\, \|v\|_0^2\,, \tag{3.22}$$

$v \in H^0$, pour un opérateur compact E_0 et où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire dans H^0.

Par le Lemme de Céa-Pol'skiĭ (Voir [23]), (3.22) implique la stabilité d'un système de Galerkin pour $(I+M)v = f$ dans H^0. (Rappelons que $I+M$ est inversible dans H^0, voir [26]). Comme la méthode de Galerkin dans l'espace $\ker(I-T^\tau)$ consiste à trouver $v^\tau \in \ker(I-T^\tau)$ tel que

$$T^\tau (I+M)\, v^\tau = T^\tau f$$

il s'ensuit que pour tout $v^\tau \in \ker(I-T^\tau)$, on a

$$\|T^\tau (I+M)\, v^\tau\|_0 \geq C\, \|v^\tau\|_0\,,$$

et (3.21) s'ensuit.

Pour montrer (3.22), observons que par la définition de M et (3.11),

$$I + M = I + \mathsf{S}^{-1}(S - \mathsf{S}) = \mathsf{S}^{-1} S = I + B + E,$$

avec E compact. Il suffit donc de prouver les estimations

$$\operatorname{Re}\langle (I + \mathcal{B}_\ell)\, w, w\rangle \geq C_\ell\, \langle w, w\rangle^2\,, \tag{3.23}$$

avec $w \in L^2(\mathbb{R}^+) \times L^2(\mathbb{R}^+)$, pour chaque $\ell = 1, \ldots, M$ et $\mathcal{B}_\ell$ est la partie locale de B près de P_ℓ.
Maintenant $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans $L^2(\mathbb{R}^+) \times L^2(\mathbb{R}^+)$, c'est-à-dire

$$\langle w, \widehat{w}\rangle = \int_0^\infty (w(x), \widehat{w}(x))\, dx$$

avec $(\cdot,\cdot)$ le produit interne dans $\mathbb{C}^2$.

Comme avant, sans perte de généralité, nous montrons (3.23) avec $\mathcal{B}_\ell = \mathcal{B}$ donné par (3.19). Ici, nous supposons que $x_\ell = 0$ avec le paramétrage local (3.14). Pour obtenir (3.23), on se souvient que $\mathcal{H}^2 = -I$, et $I + \mathcal{B} = -\mathcal{H}\mathcal{C}$. L'égalité de Parseval et le Lemme 21 montrent que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle (I+\mathcal{B})\, w, w\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{\operatorname{Re} z = 1/2} \operatorname{Re}\left(\sigma(\mathcal{H})(z)\, \sigma(-\mathcal{C})(z)\, \tilde{w}(z), \tilde{w}(z)\right) |dz| \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\operatorname{Re} z = 1/2} \left(\operatorname{Re}\left[\sigma(\mathcal{H})(z)\, \sigma(-\mathcal{C})(z)\right] \tilde{w}(z), \tilde{w}(z)\right) |dz|
\end{aligned}$$

où, pour toute matrice complexe D de 2×2, $\operatorname{Re}[D] = (D + D^*)/2$. Le résultat voulu est donc une conséquence du Lemme 25, lequel concerne les valeurs propres de la matrice $\operatorname{Re}[\sigma(\mathcal{H})(z)\, \sigma(-\mathcal{C})(z)]$. ∎

LEMME 25. *Pour* $\chi \in (-1,1)$, *il existe une constante* c *telle que les valeurs propres* $\lambda_\ell(z)$ *de la matrice de* 2×2, $\mathrm{Re}\left[\sigma(\mathcal{H})(z)\,\sigma(-\mathcal{C})(z)\right]$ *satisfont à*

$$\lambda_\ell(z) \geq c > 0,$$

$\ell = 1, 2$, $\mathrm{Re}\, z = 1/2$.

DÉMONSTRATION. Par le Lemme 21, nous avons pour $z = 1/2 + i\xi$, et $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\sigma(\mathcal{H})(z) = \begin{pmatrix} -ia(\xi) & b(\xi) \\ -b(\xi) & ia(\xi) \end{pmatrix},$$

$$\sigma(-\mathcal{C})(z) = \begin{pmatrix} -\alpha(\xi) & -\beta(\xi) \\ \beta(\xi) & \alpha(\xi) \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} a(\xi) &= \tanh(\pi\xi), \\ b(\xi) &= \frac{-1}{\cosh(\pi\xi)}, \\ \alpha(\xi) &= -\frac{i\sinh(\pi\xi)}{\cos(\pi\xi)}, \\ \beta(\xi) &= \frac{\cosh(\chi\pi\xi)\cos(\chi\pi)}{-\cos(\pi\xi)} + i\frac{\sinh(\chi\pi\xi)\sin(\chi\pi/2)}{-\cos(\pi\xi)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Re}\left[\sigma(\mathcal{H})(z)\,\sigma(-\mathcal{C})(z)\right] = \begin{pmatrix} A(\xi) & B(\xi) \\ B(\xi) & A(\xi) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} A(\xi) &= b(\xi)\,\mathrm{Re}\,\beta(\xi) - a(\xi)\,\mathrm{Im}\,\alpha(\xi), \\ B(\xi) &= b(\xi)\,\mathrm{Re}\,\alpha(\xi) - a(\xi)\,\mathrm{Im}\,\beta(\xi). \end{aligned}$$

Les valeurs propres $\lambda_\ell(z)$ sont

$$\begin{aligned} \lambda_1(z) &= A(\xi) + B(\xi), \\ \lambda_2(z) &= A(\xi) - B(\xi). \end{aligned}$$

Pour évaluer ces valeurs propres, observons que

$$\begin{aligned}
A(\xi) &= -\tfrac{1}{\cosh \pi\xi}\left(\tfrac{-\cosh(\chi\pi\xi)\cos(\chi\pi/2)}{\cosh(\pi\xi)}\right) - \tanh(\pi\xi)\left(\tfrac{-\sinh(\chi\pi\xi)\sin(\chi\pi/2)}{\cosh(\pi\xi)}\right) \\
&= \left(\tfrac{1}{\cosh \pi\xi}\right)^2 (\cosh(\chi\pi\xi)\cos(\chi\pi/2) + \sinh(\pi\xi)\sinh(\chi\pi\xi)\sin(\chi\pi/2)), \\
B(\xi) &= -\tanh(\pi\xi)\left(\tfrac{-\sinh(\chi\pi\xi)\sin(\chi\pi/2)}{\cosh(\pi\xi)}\right) \\
&= \left(\tfrac{1}{\cosh \pi\xi}\right)^2 (\sinh(\pi\xi)\sinh(\chi\pi/2)\sin(\chi\pi/2)).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Donc, comme $z = 1/2 + i\xi$, nous avons

$$\sigma(\mathcal{H})(z)\,\sigma(-\mathcal{C})(z) \to \begin{pmatrix} \mp i & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \mp i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si $\xi \to \pm\infty$.
Dans ce cas, on a $\lambda_\ell(1/2 \pm \infty) = 1$, $\ell = 1, 2$. Comme les expressions (3.24) sont des expressions paires en ξ et χ, le lemme s'ensuit. ■

3.4. Splines

Soit $\Delta = \{x_\ell\}_{\ell=-\infty}^{\infty}$ un découpage de $\mathbb{R}$ par les points x_ℓ qui satisfont $x_0 = 0$ et $x_{\ell+n} = x_\ell + 1$ pour $N \in \mathbb{N}$ fixé et $\ell \in \mathbb{Z}$. Soient

$$h = \max_{\ell=1,\ldots,n}(x_\ell - x_{\ell-1}), \quad \underline{h} = \min_{\ell=1,\ldots,n}(x_\ell - x_{\ell-1}).$$

Par S_Δ^k ($k \in \mathbb{N}_0$), nous désignons l'espace de toutes les fonctions splines régulières de degré k subordonnées au découpage Δ, c'est-a-dire que chaque fonction de S_Δ^k et ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à $k-1$ sont des fonctions périodiques et continues dans $\mathbb{R}$, et sa restriction à chaque intervalle (x_ℓ, x_{+1}), $\ell \in \mathbb{Z}$ est un polynôme de degré plus petit ou égal à k; S_Δ^0 est l'ensemble de toutes les fonctions constantes dans chaque sous-intevalle de Δ. Par tout $k \in \mathbb{N}_0$, S_Δ^k est un espace N-dimensionnel et il admet une base $\{\varphi_\ell^k\}_{\ell=0}^{n-1}$ de B -splines.

On a $S_\Delta^k \subset H^s$ si et seulement si $s < k + 1/2$. Les propriétés suivantes (cf. [23]) de l'espace de splines S_Δ^k jouent un rôle très important dans l'analyse d'erreur pour les méthodes d'approximation par splines.

Théorème 26 [Propriété d'Approximation $PA(k+1/2)$]. *Si $s \le r \le k+1$, $s < k + 1/2$ et $\sigma < s$, alors pour tout $u \in H^r$ et tout découpage Δ, il existe $u_\Delta \in S_\Delta^k$ tel que*

$$\|u - u_\Delta\|_{H^t} \le c(t)\, h^{r-t}\, \|u\|_{H^r} \tag{3.25}$$

pour tout $t \in [\sigma, s]$, et $c(t)$ est une constante indépendante de u et Δ.

THÉORÈME 27. *Si $s \le r \le k+1$ et $s < k+1/2$, alors il existe une constante c indépendante de u et Δ tels que*

$$\|u - P_{s,\Delta}u\|_{H^s} \le ch^{r-s}\|u\|_{H^r}, \tag{3.26}$$

$u \in H^r$, avec $P_{s,\Delta}$ la projection orthogonale sur S^k_Δ dans H^r.

3.5. APPROXIMATION DE x^α PAR DES SPLINES NON-UNIFORMES

Les résultats suivants donnent un ordre de convergence maximal dans l'approximation de fonctions singulières sur des découpages non uniformes. On utilise des découpages non uniformes mais les estimations sont faites avec des normes standards dans L^2 (sans poids). Ceci est une différence importante par rapport à [7].

Pour un $q \ge 1$, on désigne par $S^{(N)}_{\ell,q}$ l'espace des splines d'ordre ℓ sur l'intervalle $[0,1]$ par rapport à la subdivision

$$x^{(N)}_j = (j/N)^q, \qquad j = 0, \ldots, N.$$

THÉORÈME 28. *Soit $\ell = 0,1,2,3$. Si $[\alpha_0, \alpha_1] \subset \mathbb{R}$ avec $\alpha_0 > -1/2$ et $q(1+2\alpha_0) > 2(\ell+1)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\inf_{u \in S^{(N)}_{\ell,q}} \|u - x^\alpha\|_{L^2(]0,1[)} \le \frac{C}{N^{\ell+1}}$$

et

$$\inf_{u \in S^{(N)}_{\ell,q}} \|u - x^\alpha \log x\|_{L^2(]0,1[)} \le \frac{C}{N^{\ell+1}} \log N$$

pour tous $N > 0$ et $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$.

DÉMONSTRATION. Nous traitons ici le cas $\ell = 3$. Les autres sont analogues. Pour simplifier les notations, on n'écrira pas explicitement la dépendance en N. Bien sur, les estimations seront uniformes par rapport à ce paramètre. Notons par $S = S_N$ le spline régulier en $[N^{-q}, 1]$ qui interpole la fonction $f(x) = x^\alpha$ en $x_1 = x^{(N)}_1, \ldots, x^{(N)}_N$ et ses dérivées en x_1 et x_N. Si $z_\ell = D^2 S(x_\ell)$ et $h_\ell = x_\ell - x_{\ell-1}$, on a

$$D^2 S(x) = z_\ell \frac{x_{\ell+1} - x_\ell}{h_{\ell+1}} + z_{\ell+1} \frac{x - x_\ell}{h_{\ell+1}}$$

dans l'intervalle $[x_\ell, x_{\ell+1}]$. Dès lors, dans le même domaine,

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{z_\ell h^2_{\ell+1}}{6}\left[\left(\frac{x_{\ell+1}-x}{h_{\ell+1}}\right)^3 - \frac{x_{\ell+1}-x}{h_{\ell+1}}\right] + y_\ell \frac{x_{\ell+1}-x}{h_{\ell+1}} \\ &\quad + \frac{z_{\ell+1} h^2_{\ell+1}}{6}\left[\left(\frac{x-x_\ell}{h_{\ell+1}}\right)^3 - \frac{x-x_\ell}{h_{\ell+1}}\right] + y_{\ell+1}\frac{x-x_\ell}{h_{\ell+1}}; \end{aligned}$$

avec $y_\ell = S(x_\ell)$. La continuité de la première dérivée de S en les points $x_2, \ldots, x_{N-1}$ conduit à

$$\mu_\ell z_{\ell-1} + 2z_\ell + \lambda_\ell z_{\ell+1} = d_\ell; \qquad \ell = 2, \ldots, N-1,$$

avec

$$d_\ell = \frac{6}{h_\ell + h_{\ell+1}} \left(\frac{y_{\ell+1} - y_\ell}{h_{\ell+1}} - \frac{y_\ell - y_{\ell-1}}{h_\ell} \right)$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_\ell &= \frac{h_{\ell+1}}{h_\ell + h_{\ell+1}}, \\ \mu_\ell &= \frac{h_\ell}{h_\ell + h_{\ell+1}}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Les conditions $DS(x_1) = y_1'$ et $DS(x_N) = y_N'$ s'écrivent

$$\begin{aligned} 2z_0 + z_1 &= \frac{6}{h_1}\left[\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0'\right] &= d_0, \\ 2z_{N-1} + z_N &= \frac{6}{h_N}\left[\frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - y_N'\right] &= d_N. \end{aligned}$$

Le système à résoudre s'écrit $Mz = d$ avec

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & \mu_3 & 2 & \ddots & & \\ & & \mu_4 & \ddots & \lambda_{N-2} & \\ & & & \ddots & 2 & \lambda_{N-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Désignons par z, d et g les vecteurs de $\mathbb{R}^N$ dont les composantes sont respectivement z_ℓ, d_ℓ et $D^2 f(x_\ell)$, $\ell = 1, \ldots, N$. Posons

$$r = d - Mg = M(z - g).$$

D'abord on donnera une borne de $(z - g)$ avec des estimations explicites de r.

Comme $q \geq 1$, on a $2\ell^q \leq (\ell+1)^q + (\ell-1)^q$ et donc $h_\ell \leq h_{\ell+1}$. De (3.27) et du Lemme 33 nous avons

$$\frac{1}{2} < \mu_2 < \mu_3 < \ldots < \mu_{N-1} < 1,$$

et

$$1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \ldots > \lambda_{N-1} > \frac{1}{2}.$$

En utilisant le Lemme 31, on obtient

$$\begin{aligned}
|r_1| &= \left|\tfrac{6}{h_1}\left(\tfrac{y_2-y_1}{h_2} - Df(x_1)\right) - 2D^2f(x_1) - D^2f(x_2)\right| \\
&= \left|\int_0^{h_2} \tfrac{t(h_2-t)}{h_2^2}(2h_2-t)\, D^4f(t+x_1)\, dt\right| \\
&= |\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)|\, h_2^2 N^{q(4-\alpha)} \int_0^1 s(1-s)(2-s)\left((2^q-1)s+1\right)^{\alpha-4} ds \\
&\leq CN^{q(2-\alpha)}
\end{aligned}$$

Si $1 < \ell < N$, on a, en utilisant le Lemme 32,

$$\begin{aligned}
|r_\ell| &= |d_\ell - \mu_\ell D^2f(x_{\ell-1}) - 2D^2f(x_\ell) - \lambda_\ell D^2f(x_{\ell+1})| \\
&= \tfrac{6}{h_{\ell+1}+h_\ell}\left(\tfrac{f(x_{\ell+1})-f(x_\ell)}{h_{\ell+1}} - \tfrac{f(x_\ell)-f(x_{\ell+1})}{h_\ell}\right) \\
&\quad -\mu_\ell D^2f(x_{\ell-1}) - 2D^2f(x_\ell) - \lambda_\ell D^2f(x_{\ell+1}) \\
&= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\left|\int_0^{h_\ell} \tfrac{t\left(h_\ell^2-t^2\right)}{h_\ell(h_\ell+h_{\ell+1})}(t+x_{\ell-1})^{\alpha-4}\, dt\right. \\
&\quad \left. + \int_{h_\ell}^{h_{\ell+1}+h_\ell} \tfrac{(h_{\ell+1}+h_\ell-t)(t-h_\ell)(2h_{\ell+1}+h_\ell-t)}{h_\ell(h_\ell+h_{\ell+1})}(t+x_{\ell-1})^{\alpha-4}\, dt\right| \\
&\leq Ch_\ell^2\left(\int_0^1 s(1-s^2)\left((1-s)x_{\ell-1}+sx_\ell\right)^{\alpha-4} ds\right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 s(1-s)(2-s)\left((1-s)x_\ell+sx_{\ell+1}\right)^{\alpha-4} ds\right) \\
&\leq C_1 h_\ell^2 N^{q(4-\alpha)} \ell^{q(\alpha-4)} \\
&\leq C_2 N^{q(2-\alpha)} j^{-(q(2-\alpha)+2)}
\end{aligned}$$

De la même manière

$$\begin{aligned}
|r_N| &= \left|\tfrac{6}{h_N}\left(\tfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N}-Df(x_N)\right)+D^2f(x_{N-1})+2D^2f(x_N)\right| \\
&= \left|\int_0^{h_N}\tfrac{t(h_N-t)}{h_N^2}(2h_N-t)\,D^4f(x_N-t)\,dt\right| \\
&\le Ch_N^2 \\
&\le C_1N^{-2}.
\end{aligned}$$

Si on somme, on obtient

$$\left|\ell^{q(2-\alpha)+2}r_\ell\right| \le CN^{q(2-\alpha)}$$

pour ℓ et N quelconques.

Pour obtenir la majoration de $z-d$, on considère la matrice $\Delta = \mathrm{diag}\,(1, 2^p, \ldots, N^p)$ avec $p = q(2-\alpha)+2$. On pose $\Delta r = A\Delta(z-g)$ avec

$$A = \Delta M \Delta^{-1}.$$

Soit

$$M = 2\left(I + \frac{1}{2}(L+U)\right)$$

avec L (resp. U) triangulaire inférieur (resp. supérieur). On a

$$\left(I+\frac{1}{2}(L+U)\right)^{-1} = I + \sum_{\ell=1}^{+\infty}(-2)^\ell (L+U)^\ell.$$

Les éléments avec indices j, k d'un produit de r copies de L et s copies de U est non nulle si et seulement si $j-k=s-r$. S'il est non nul, il est borné par λ^{r+s}. En utilisant ceci, on a

$$\left(\sum_{\ell=1}^{+\infty}(-2)^{-\ell}(J+K)^\ell\right)_{jk} \le \sum_{\ell=|j-k|}^{+\infty} 2^{-\ell}2^\ell\lambda^\ell = \frac{\lambda^{|j-k|}}{1-\lambda}.$$

S'ensuit que

$$\|A^{-1}\|_\infty = \sup_{j=1,\ldots,N}\sum_{k=1}^N |A_{jk}^{-1}| \le \frac{1}{2}\sup_{j=1,\ldots,N}\frac{j^p}{1-\lambda}\sum_{k=1}^N k^{-p}\lambda^{|j-k|}.$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\ell^p \sum_{k=1}^{N} k^{-p} \lambda^{|\ell-k|} &\leq \sum_{k=1}^{N} \lambda^{k-\ell} + \ell^p \lambda^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell-1} k^{-p} \lambda^{-k} \\
&\leq \tfrac{1}{1-\lambda} + 2^{p-1} \sum_{k=1}^{\ell-1} \tfrac{k^p+(\ell-k)^p}{k^p} \lambda^{\ell-k} \\
&= \tfrac{1+2^{p-1}}{1-\lambda} + 2^{p-1} \sum_{k=1}^{\ell-1} \left(\tfrac{\ell}{\ell-k}\right)^p \lambda^k \\
&= \tfrac{1+2^{p-1}}{1-\lambda} + 2^{p-1} \left(\sum_{k=1}^{[\ell/2]} \lambda^k + \ell^p \lambda^{\ell/2} \sum_{k=[\ell/2]+1}^{\ell-1} \left(\tfrac{\ell}{\ell-k}\right)^p \lambda^k \right) \\
&\leq \tfrac{1+2^{p-1}}{1-\lambda} + 2^{p-1} \left(\sum_{k=1}^{[\ell/2]} \lambda^k + \ell^p \lambda^{\ell/2} \sum_{k=[\ell/2]+1}^{\ell-1} \lambda^{k-\ell/2} \right),
\end{aligned}$$

il existe $C > 0$ indépendant de N tel que $\|A^{-1}\|_{\infty} \leq C$. Ceci montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|z_\ell - g_\ell| \leq C N^{q(2-\alpha)} \ell^{-(q(2-\alpha)+2)}$.

Si $\ell > 0$ et $x_\ell < x < x_{\ell+1}$, on a

$$\begin{aligned}
|f(x) - S(x)| &\leq C_1 N^{q(2-\alpha)} \ell^{-(q(2-\alpha)+2)} h_\ell^2 \\
&\quad + \left| \int_0^{x-x_\ell} \tfrac{t(x_{\ell+1}-x)\left(h_\ell^2 - t^2 - (x_{\ell+1}-x)\right)^2}{6h_\ell} (t + x_\ell)^{\alpha-4} \, dt \right| \\
&\quad + \left| \int_{x-x_\ell}^{h_\ell} \tfrac{(x-x_\ell)(h_\ell-t)\left(h_\ell^2 - (h_\ell-t)^2 - (x-x_\ell)^2\right)}{6h_\ell} (t + x_\ell)^{\alpha-4} \, dt \right| \\
&\leq C_2 N^{-q\alpha} \ell^{q\alpha-4} + C_3 h_\ell^4 \int_0^1 s\left(1-s^2\right)(h_\ell s + x_\ell)^{\alpha-4} \, ds \\
&\leq C_4 N^{-q\alpha} \ell^{q\alpha-4}
\end{aligned}$$

S'ensuit que

$$\|f - S\|_{L^2(]N^{-q},1[)}^2 \leq C \sum_{\ell=1}^{N} N^{-2q\alpha} \ell^{2(q\alpha-4)} \tfrac{1}{N} \left(\tfrac{\ell}{N}\right)^{q-1} = C \sum_{\ell=1}^{N} N^{-q(1+2\alpha)} \ell^{q(1+2\alpha)-9} \leq C_1 N^{-8},$$

si $q(1+2\alpha) \geq 8$.

Pour obtenir un spline dans $[0,1]$, on peut prolonger S par

$$u(x) = S(x_1) + (x - x_1) DS(x_1) + \frac{(x - x_1)^2}{2} D^2 S(x_1)$$

sur $[0, N^{-q}]$. Puisque

$$\int_0^{N^{-q}} \left| x^\alpha - \left[S(x_1) + (x - x_1) DS(x_1) + \tfrac{(x-x_1)^2}{2} D^2 S(x_1) \right] \right|^2 dx$$

$$= N^{-q(2\alpha+1)} \int_0^1 \left| s^\alpha - \left(1 + \alpha (s-1) s^{\alpha-1} + \tfrac{(s-1)^2}{2} N^{q(\alpha-2)} D^2 S(x_1) \right) \right|^2 ds,$$

et

$$\left| D^2 S(x_1) \right| \leq |z_1 - g_1| + |g_1| \leq C N^{q(2-\alpha)}.$$

Pour le cas $x^\alpha \log x$ on obtient de même l'estimation

$$|f(x) - S(x)| \leq C N^{-q\alpha} \ell^{q\alpha-4} \log N,$$

ce qui fournit le résultat annoncé. ■

LEMMES AUXILIAIRES. Ici nous énonçons quelques résultats qui sont été utilisés dans la dernière section. Leur démonstration est un simple calcul et nous laissons les détails au lecteur.

LEMME 29. *Si $h > 0$ et $f \in C^3(]0, h[)$, alors*

$$2Df(0) + \frac{1}{3} Df(h) - \frac{8}{3h} [f(h/2) - f(0)] = -\int_0^h \rho(t) D^3 f(t)\, dt$$

avec

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x(3h-4x)}{3h} & \text{si } 0 \leq x \leq h/2, \\ \frac{(h-x)}{3} & \text{si } h/2 \leq x \leq h. \end{cases}$$

LEMME 30. *Si $h, k > 0$ et $f \in C^3(]0, h+k[)$, alors*

$$\frac{8f(h+k/2) - f(k/2)}{3(h+k)} - Df(h) - \frac{[hDf(0) + kDf(h+k)]}{h} = \int_0^{h+k} \rho(t) D^3 f(t)\, dt$$

avec

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{hx}{3(h+k)} & \text{si } 0 \leq x \leq h/2, \\ \frac{(h-x)(4x-h)}{3(h+k)} & \text{si } h/2 \leq x \leq h, \\ \frac{(h-x)[4(x-h)-3k]}{3(h+k)} & \text{si } h \leq x \leq h+k/2, \\ \frac{h(h+k-x)}{3(h+k)} & \text{si } h+k/2 \leq x \leq h+k. \end{cases}$$

LEMME 31. *Si $h > 0$ et $f \in C^4(]0, h+k[)$, alors*

$$2D^2 f(h) - \int_0^{h+k} \rho(t)\, D^4 f(t)\, dt$$

$$= \frac{6}{h+k}\left[\frac{f(h+k)-f(h)}{k} - \frac{f(h)-f(0)}{h}\right] - \frac{hD^2 f(0) - kD^2 f(h+k)}{h+k},$$

avec

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x}{h(h+k)}\left(h^2 - x^2\right) & \text{si} 0 \le x \le h, \\ \frac{(h+k-x)(x-h)}{h(h+k)}(2k+h-x) & \text{si } h \le x \le h+k. \end{cases}$$

LEMME 32. *Si $h > 0$ et $f \in C^4(]0, h[)$, alors pour tout $x \in [0, h]$, on a*

$$f(x) - \int_0^{h} \rho_0(t)\, D^4 f(t)\, dt$$

$$= \frac{f(h)-f(0)}{h} - \frac{x(h-x)}{6}\frac{(2h-x)\,D^2 f(0) + (x+h)\,D^2 f(h)}{h}$$

et

$$Df(x) - \int_0^{h} \rho_1(t)\, D^4 f(t)\, dt$$

$$= \frac{f(h)-f(0)}{h} + \frac{\left(h^2 - 3(h-x)^2\right) D^2 f(0) - \left(h^2 - 3x^2\right) D^2 f(h)}{6h}$$

avec

$$\rho_0(t) = \begin{cases} \frac{t(h-x)\left(h^2-t^2-(h-x)^2\right)}{6h} & \text{si } 0 \le t \le x, \\ \frac{x(h-x)\left(h^2-(h-x)^2-x^2\right)}{6h} & \text{si } x \le t \le h, \end{cases}$$

et

$$\rho_1(t) = \begin{cases} \frac{t\left(h^2-t^2-3(h-x)^2\right)}{6h} & \text{si } 0 \le t \le x, \\ \frac{(t-h)\left(h^2-(h-t)^2-3x^2\right)}{6h} & \text{si } x \le t \le h. \end{cases}$$

LEMME 33. *Soient $N \in \mathbb{N}$, $x_\ell = (\ell/N)^q$ pour $\ell = 1, 2, \ldots, N-1$ et*

$$\mu_\ell = \frac{x_\ell - x_{\ell-1}}{x_{\ell+1} - x_{\ell-1}}, \quad 2 \le \ell < N.$$

Les nombres μ_ℓ vérifient

$$\frac{1}{2} < \mu_2 < \mu_3 < \ldots < \mu_{N-1} < 1.$$

DÉMONSTRATION. Les inégalités $1/2 < \mu_2$ et $\mu_{N-1} < 1$ sont immédiates à partir de la définition de μ_ℓ. Pour démontrer la croissance de μ_ℓ par rapport à ℓ. Soit f_k défini par

$$f_k(s) = \frac{(s+1)^k - s^k}{(s+2)^k - s^k}.$$

On a

$$\begin{aligned} f_k'(s) &= \frac{k}{\left[(s+2)^k - s^k\right]^2} \left\{ \left[(s+1)^{k-1} - s^{k-1}\right] \left[(s+2)^k - s^k\right] \right. \\ &\quad \left. - \left[(s+1)^k - s^k\right] \left[(s+2)^{k-1} - s^{k-1}\right] \right\} \\ &= \frac{k\left[(x+1)^{k-1}(x+2)^{k-1}\right]}{\left[(s+2)^k - s^k\right]^2} \left[(s+1)^{k-1}(s+2)^{k-1} - 2(s+2)^{k-1}s^{k-1} + (s+1)^{k-1}s^{k-1}\right]. \end{aligned}$$

Cette expression est positive car la fonction $(1/s)^{k-1}$ est strictement convexe si $k > 1$, c'est-à-dire

$$\left(\frac{1}{s+1}\right)^{k-1} < \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{s}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{s+2}\right)^{k-1}\right]$$

et

$$2\frac{1}{(s+1)^{k-1}} < \frac{s(s+1)}{[s(s+2)]^{k-1}}.$$

On obtient

$$2(s+2)^{k-1} s^{k-1} < (s+1)^{k-1}(s+2)^{k-1} + s^{k-1}(s+1)^{k-1}.$$

Nous avons que $f_k(0) > 0$ et $f_k' > 0$ d'où le résultat voulu. ■

3.6. CONVERGENCE DE LA MÉTHODE

Soient $v \in H^0$ et $R_\Delta v \in S_\Delta^k$ la solution des équations de collocation

$$Q_\Delta \mathsf{S}(R_\Delta v) = Q_\Delta \mathsf{S} v.$$

On peut démontrer, (cf. [23]) que cette équation définit $R_\Delta v$ de manière unique, et il existe une constante $R > 0$ telle que

$$\|R_\Delta\|_0 \leq R. \tag{3.28}$$

Si nous utilisons les propriétés de S discutées dans la section précédente, nous avons que w est solution de (3.2) si et seulement si

$$(I + M)w = e \tag{3.29}$$

avec $M = \mathsf{S}^{-1}(S - \mathsf{S})$ et $e = \mathsf{S}^{-1}g$. Les équations de collocation sont

$$Q_\Delta \mathsf{S}(I + M)w_\Delta = Q_\Delta g.$$

Ici, w_Δ vérifie (3.7) si et seulement si

$$Q_\Delta \mathsf{S} w_\Delta = Q_\Delta \mathsf{S}\left(e - M w_\Delta\right) = Q_\Delta A R_\Delta \left(e - M w_\Delta\right),$$

et en vertu de la définition de R_Δ, ceci est équivalent à

$$w_\Delta = R_\Delta \left(e - M w_\Delta\right). \tag{3.30}$$

Dans la section précédente, nous avons fait une analyse de la décomposition de M sous la forme

$$M = A^{-1}(S - \mathsf{S}) = B + E, \tag{3.31}$$

avec E compact dans H^0 et B donné par le Théorème 20.

Soient N la quantité de points sur chaque côté, $h = \max_j\{(1/N)^{q_j}\}$ et $i^* \in N$ qui vérifie $i^* < N$. Soit T^{i^*h} l'opérateur troncature défini dans (3.9) avec $\tau = i^*h$. Nous définissons

$$S^{i^*h} = \mathsf{S} + (S - \mathsf{S})T^{i^*h},$$

et, à la place de (3.7), nous considérons une méthode plus générale,

$$Q_\Delta S^{i^*h} w_\Delta = Q_\Delta g. \tag{3.32}$$

Si $i^* = 0$, alors (3.32) est équivalent à (3.7). Sinon, (3.32) peut donner (3.7) par un petit changement dans la matrice des coefficients du système linéaire correspondant à (3.32).

En imitant l'obtention de (3.30) à partir de (3.7), on peut montrer que (3.32) est équivalent à

$$\left(I + R_\Delta M^{i^*h}\right) w_\Delta = R_\Delta e, \tag{3.33}$$

avec

$$M^{i^*h} = \mathsf{S}^{-1}\left(S - \mathsf{S}\right) T^{i^*h}. \tag{3.34}$$

La stabilité de (3.32) s'obtient à l'aide du résultat suivant.

LEMME 34. *Pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $i^* \geq 1$ indépendant de N tel que*

$$\left\|(I - R_\Delta)\, M^{i^*h}\right\|_0 < \epsilon,$$

pour tout N suffisamment grand.

DÉMONSTRATION. De (3.34) et (3.31), nous avons

$$M^{i^*h} = (B + E)\, T^{i^*h} \tag{3.35}$$

Une expansion de B en termes d'opérateurs locaux de convolution de Mellin au voisinage de chaque sommet est donnée par le Théorème 20. Si nous utilisons des fonctions de troncature de classe C^∞, périodiques, à support compact dans $(S_j - \epsilon, S_j + \epsilon)$ comme dans la démonstration du Théorème 20, nous avons

$$B = \sum_{j=1}^{M} \psi_j B_j \psi_j + E,$$

avec E compact. Le noyau de $\psi_j B_j \psi_j$ est maintenant regulier dans la region $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \backslash \{(S_j, S_j)\}$. Si on remplace dans (3.35), on obtient

$$M^{i^*h} = \left[\sum_{j=1}^{M} \psi_j B_j \psi_j + E \right] T^{i^*h}.$$

Comme $\left\| T^{i^*h} \right\|_0 = 1$ et comme $R_\Delta \to I$ ponctuellement dans H^0, on a

$$\left\| (I - R_\Delta) E T^{i^*h} \right\|_0 \to 0, \qquad \text{si } N \to \infty.$$

Donc, la démonstration sera complète si nous pouvons montrer que, pour tout j et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $i^* \geq 1$ indépendant de N tel que

$$\left\| (I - R_\Delta) \psi_j B_j \psi_j T^{i^*h} \right\|_0 < \epsilon, \tag{3.36}$$

pour N suffisamment grand.
Il en résulte que si f est un fonction 2π -périodique dans $[-\pi, \pi]$, alors il existe $Qf \in S_\Delta^k$ tel que

$$\|f - Qf\|_{0,(s_i, s_{i+1})} \leq C \|f\|_{0,(s_{i+1-k}, s_{i+k})}, \qquad f \in H^0. \tag{3.37}$$

De [23] (Théorème 2.15), nous avons la propriété d'approximation

$$\|f - Qf\|_{0,(s_i, s_{i+1})} \leq Ch \|Df\|_{0,(s_{i+1-k}, s_{i+k})}, \qquad \text{si } f \in H^1. \tag{3.38}$$

Dès lors, en vertu de la relation $R_\Delta v_\Delta = v_\Delta$ valable pour tout $v_\Delta \in S_\Delta^k$ et en utilisant (3.28), nous avons

$$\left\| (I - R_\Delta) \psi_j B_j \psi_j T^{i^*h} v \right\|_0 \leq C \left\| (I - Q) \psi_j B_j \psi_j T^{i^*h} v \right\|_0, \qquad \text{si } v \in H^0. \tag{3.39}$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $S_j = 0$, que N est suffisamment grand et que $i^* h < \epsilon$. Nous introduisons la notation

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{i : s_{i+k} \leq -h \text{ ou } s_{i+1-k} \geq h\}, \\ \Omega &= \cup \{[s_i, s_{i+1}] : i \in \Lambda\}. \end{aligned}$$

Dans ces conditions, (3.38) implique

$$\left\| (I - Q_\Delta) \left(\psi_\ell B_\ell \psi_\ell T^{i^*h} v \right) \right\|_{0,\Omega} \leq Ch \left\| D \left(\psi_\ell B_\ell \psi_\ell T^{i^*h} v \right) \right\|_{0,[-\epsilon,\epsilon] \backslash [-h,h]}, \tag{3.40}$$

où C dépend de k mais ne dépend pas de h. Maintenant, nous choisissons $\rho \in (0, 1/2)$. Pour $s \in [h, \epsilon]$ nous avons

$$\begin{aligned} \left| \left(D\psi_\ell B_\ell \psi_\ell T^{i^*h} v \right)(s) \right| \;&\leq\; C \max_{k \in \{0,1\}} \left[\int_{-\epsilon}^{-i^*h} \left| \left(\frac{d}{ds} \right)^k b_\ell^{+-} \left(\tfrac{s}{-\sigma} \right) \right| \frac{|v(\sigma)|}{-\sigma} d\sigma \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\epsilon}^{-i^*h} \left| \left(\frac{d}{ds} \right)^k b_\ell^{++} \left(\tfrac{s}{\sigma} \right) \right| \frac{|v(\sigma)|}{-\sigma} d\sigma \right]. \end{aligned}$$

De ceci, en calculant les dérivées du côté droit et en utilisant la majoration $\|v\|_0 \leq 1$, nous avons, pour $s \in [h, \epsilon]$,

$$\begin{aligned}
&\left|\left(D\psi_\ell B_\ell \psi_\ell T^{i^*h} v\right)(s)\right| \\
&\leq C \max_{k\in\{0,1\}} \int_{i^*h}^{\epsilon} \left[\left|D^k b_\ell^{+-}\left(\tfrac{s}{\sigma}\right)\right| |v(-\sigma)| + \left|D^k b_\ell^{++}\left(\tfrac{s}{\sigma}\right)\right| |v(\sigma)|\right] \sigma^{-k-1} d\sigma \\
&= C \max_{k\in\{0,1\}} s^{-k-\rho} \int_{i^*h}^{\epsilon} \left(\tfrac{s}{\sigma}\right)^{k+\rho} \left[\left|D^k b_\ell^{+-}\left(\tfrac{s}{\sigma}\right) |v(-\sigma)|\right| + \left|D^k b_\ell^{++}\left(\tfrac{s}{\sigma}\right)\right| |v(\sigma)|\right] \sigma^{\rho-1} d\sigma \\
&\leq C s^{-1-\rho} \int_{i^*h}^{\epsilon} \{|v(-\sigma)| + |v(\sigma)|\} \sigma^{\rho-1} d\sigma \\
&\leq C s^{-1-\rho} \left[(i^*h)^{2\rho-1}\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Si nous utilisons une majoration du même type pour $s \in [-\epsilon, -h]$, et si nous intégrons (3.41) sur $[-\epsilon, \epsilon] \setminus [-h, h]$, nous obtenons

$$h \left\|D\psi_\ell B_\ell \psi_\ell T^{i^*h} v\right\|_{0,[-\epsilon,\epsilon]\setminus[-h,h]} \leq Ch \left[\int_h^{\epsilon} s^{-2-2\rho} ds\right]^{\frac{1}{2}} \left[(i^*h)^{2\rho-1}\right]^{\frac{1}{2}} = C \left[(i^*)^{2\rho-1}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.42}$$

Si nous remplaçons (3.42) dans (3.40), nous avons

$$\left\|(I-Q)\left(\psi_\ell B_\ell \psi_\ell T^{i^*h} v\right)\right\|_{0,\Omega} \leq C (i^*)^{\rho-\frac{1}{2}}. \tag{3.43}$$

Ceci nous donne un estimation de la norme du côté droit de (3.39) sur $\Omega \subset [-\pi, \pi]$. Pour le reste de la norme, nous utilisons (3.37),

$$\left\|(I-Q)\left(\psi_\ell B_\ell \psi_\ell T^{i^*h} v\right)\right\|_{0,[-\pi,\pi]\setminus\Omega} \leq C \left\|\left(\psi_\ell B_\ell \psi_\ell T^{i^*h} v\right)\right\|_{0,[-p_h,p_h]}, \tag{3.44}$$

avec $p_h = (2k-1)h$. Maintenant, si $s \in [0, p_h]$ et N est suffisamment grand, nous avons

$$\left|\left(\psi_\ell B_\ell \psi_\ell T^{i^*h} v\right)(s)\right|$$

$$\leq C\left[\int_{-\epsilon}^{-i^*h} \left|b_\ell^{+-}\left(\tfrac{s}{-\sigma}\right)\right| \frac{|v(\sigma)|}{-\sigma} d\sigma + \int_{-\epsilon}^{-i^*h} \left|b_\ell^{+-}\left(\tfrac{s}{-\sigma}\right)\right| \frac{|v(\sigma)|}{\sigma} d\sigma\right]$$

$$= C\int_{-\epsilon}^{-i^*h} \left[\left|b_\ell^{+-}\left(\tfrac{s}{\sigma}\right)\right| |v(-\sigma)| + \left|b_\ell^{+-}\left(\tfrac{s}{\sigma}\right)\right| |v(\sigma)|\right] \frac{d\sigma}{\sigma}$$

$$= Cs^{-\rho}\int_{-\epsilon}^{-i^*h} \left(\frac{s}{\sigma}\right)^{\rho} \left[\left|b_\ell^{+-}\left(\tfrac{s}{\sigma}\right)\right| |v(-\sigma)| + \left|b_\ell^{+-}\left(\tfrac{s}{\sigma}\right)\right| |v(\sigma)|\right] \sigma^{\rho-1} d\sigma$$

$$\leq Cs^{-\rho}\int_{-\epsilon}^{-i^*h} \left[|v(-\sigma)| + |v(\sigma)|\right] \sigma^{\rho-1} d\sigma$$

pour $\rho \in (0, 1/2)$. Il s'ensuit, comme dans (3.41), que

$$\left|\left(\psi_\ell B_\ell \psi_\ell T^{i^*h} v\right)(s)\right| \leq Cs^{-\rho}\left[(i^*h)^{2\rho-1}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent,

$$\left\|\psi_\ell B_\ell \psi_\ell T^{i^*h} v\right\|_{0,[0,p_\Delta]} \leq C\left[\int_0^{(2k-1)h} s^{-2\rho} ds\right]^{\frac{1}{2}} (i^*h)^{\rho-\frac{1}{2}} \leq Ch^{\frac{1}{2}-\rho}(i^*h)^{\rho-\frac{1}{2}} = C(i^*)^{\rho-\frac{1}{2}}. \tag{3.45}$$

Une majoration du même type existe dans $[-p_h, 0]$. Finalement, si nous remplaçons (3.45) dans (3.44), nous prouvons (3.36) à l'aide de (3.43). ■

Démonstration du Théorème 19. Il découle de la Remarque 24 que si i^* est fixé, alors l'opérateur de section finie $I + M^{i^*h} = I + \mathsf{S}^{-1}(S - \mathsf{S})T^{i^*h}$ est inversible pour N suffisamment grand, et il a un inverse qui est borné indépendamment de N. En vertu de l'égalité

$$I + R_\Delta M^{i^*h} = \left(I + M^{i^*h}\right) - \left(I - R_\Delta\right) M^{i^*h},$$

le Lemme 34 prouve qu'il existe i^* fixe tel que pour tout N suffisamment grand, $\left(I + R_\Delta M^{i^*h}\right)^{-1}$ existe et

$$\left\|\left(I + R_\Delta M^{i^*\Delta}\right)^{-1}\right\|_0 \leq C,$$

avec C indépendant de N. Donc, à partir de (3.29) et (3.33), nous avons

$$
\begin{aligned}
w - w_\Delta &= \left(I + R_\Delta M^{i^*h}\right)^{-1}\left(w + R_\Delta M^{i^*h} w - R_\Delta e\right) \\
&= \left(I + R_\Delta M^{i^*h}\right)^{-1}\left[(w - R_\Delta w) + R_\Delta\left(M^{i^*h} - M\right) w\right].
\end{aligned}
$$

Et, si nous utilisons le fait que K est inversible, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\|w - w_\Delta\|_0 &\leq C\left\{\|w - R_\Delta w\|_0 + \|A^{-1}(K - A)\|_0 \left\|\left(T^{i^*h} - I\right) w\right\|_0\right\} \\
&\leq C\left\{\|w - R_\Delta w\|_0 + \left\|\left(I - T^{i^*h}\right) w\right\|_0\right\} \qquad (3.46) \\
&\leq C\left\{\|w - v_\Delta\|_0 + \left\|\left(I - T^{i^*h}\right) w\right\|_0\right\},
\end{aligned}
$$

pour $v_\Delta \in S_\Delta^k$ (dans la dernière inégalité, nous avons utilisé le fait que $R_\Delta v_\Delta = v_\Delta$ et (3.28). Du chapitre précédent, nous savons que w s'écrit sous la forme $w = w_1 + w_2$ avec $w_1 \in H^s$ et $w_2 \in \mathcal{L}_\omega = \cup_{\ell=0}^{M-1} e_{\omega_\ell}^+ \cup e_{\omega_\ell}^-$.

Maintenant, si on prend $v_\Delta^{(1)}$ qui satisfait à la propriété d'approximation usuelle pour les splines réguliers (Propriété d'Approximation $PA(k+1/2)$), il vient

$$\left\|w_1 - v_\Delta^{(1)}\right\|_0 \leq C_1 N^{-(k+1)}. \qquad (3.47)$$

Pour w_2, nous avons les résultats de la Section 2.7:

$$\left\|w_2 - v_\Delta^{(2)}\right\|_0 \leq C_2 N^{-(k+1)}, \qquad (3.48)$$

si aucun ω_j n'appartient à $\mathcal{E}$ et

$$\left\|w_2 - v_\Delta^{(2)}\right\|_0 \leq C_2 N^{-(k+1)} \log N \qquad (3.49)$$

lorsqu'un des ω_j appartient à $\mathcal{E}$.

Pour le deuxième terme, on a

$$\left\|\left(I - T^{i^*h}\right) w\right\|_0^2 = \int_0^{i^*h} |w(t)|^2 dt \leq \int_0^{i^*N^{-q}} t^{2\alpha_0} dt = CN^{-q(2\alpha_0+1)} \leq CN^{-(k+1)}.$$

Ce dernier résultat, utilisé avec (3.47), (3.48), (3.49) et (3.46), nous donne le résultat désiré. ∎

REMERCIEMENTS: L'auteur tient à remercier toutes les personnes de l'Institut de Mathématique de l'Université de Liège qui l'ont encadré et soutenu tout au long de ce travail.

REFERENCES

[1] ARNOLD D.N., WENDLAND W.L., *On the asymptotic convergence of collocation methods*, Math. Comp. **41**, 1983, 349-381.

[2] Baiwir M., *Méthodes de collocation pour le problème de Neumann dans un ouvert polygonal*, Thèse Doctorale, Université de Liège, 1998.

[3] Costabel M., *Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results*, SIAM J. Math. Anal. **19** (3), 1988, 613-626.

[4] Costabel M., Stephan E.P., *On the convergence of collocation methods for boundary integral equations on polygons*, Math. Comp. **49**, 1987, 461–478.

[5] Dikshit H.P., Rana S.S., *Discrete Cubic Spline Interpolation over a Nonuniform Mesh*, Rocky Mountain J. Math. **17** (4), 1987, 709-718.

[6] Eskin G.I., *Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations*, Translations of Math. Mono. **52**. Amer. Math. Soc., 1981.

[7] Elschner J., Graham I.G., *An optimal order collocation method for first kind boundary integral equations on polygons*, Numer. Math. **70**, 1995, 1-31.

[8] Faure O.R., *Collocation à pas variable pour le potentiel de simple couche*, Thèse Doctorale, Université de Liège, 2000.

[9] Gaier D., *Integralgleichungen erster Art und Konforme Abbildung*, Mathematische Zeitschrift **147**, 1976, 113-129.

[10] Grisvard P., *Singularities in Boundary Value Problems*, Research Notes in Applied Mathematics **22**, Masson, 1992.

[11] Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G., *Inequalities*, Cambridge University Press, 1967.

[12] Hall C.A., Meyer W.W., *Optimal error bounds for cubic spline interpolation*, J. Aprox. Theory **16**, 1976, 105-122.

[13] Hörmander L., *The analysis of linear partial differential operators, I, II et III*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **256**, **257** & **274**, Springer-Verlag, 1983.

[14] Laubin P., *Optimal order collocation for the mixed boundary value problem on polygons*, Numer. Math. **79**, 1998, 107-140.

[15] Laubin P., *High order convergence for collocation of second kind boundary integral equations on polygons*, Math. Comp. electronically published on March 2, 2000.

[16] Laubin P., Baiwir M., *Spline collocation for boundary integral equations on polygons with cuts*, SIAM J. Numer. Anal. **35**, 1998, 1452-1474.

[17] McLean W., *Boundary integral methods for the Laplace equations*, Ph. D. thesis Australian National University, Canberra 1985.

[18] Maz'ya V.G., Nikolskiĭ S.M., *Analysis IV - Linear and boundary integral equations*, Enciclopaedia of Mathematical Sciences **27**, Springer-Verlag, 1991.

[19] Meir A., Sharma A., *Convergence of a class of interpolatory splines*, J. Aprox. Theory **1**, 1968, 243-250.

[20] Meyer Y., Coifman R.R., *Ondelettes et Opérateurs III. Opérateurs multilinéaires*, Hermann 1991.

[21] Parenti C., Lewis J.E., *Pseudodifferential operators of Mellin Type*, Comm. in Partial Differential Equations **8** (5), 1983, 477-544.

[22] Pommerenke Ch., *Boundary behaviour of conformal maps*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **299** Springer Verlag, 1992.

[23] Prössdorf S., Silbermann B., *Numerical analysis for integral and related operator equations*, Operator Theory: Advanced and Applications **52**, Biekhäuser Verlag, 1991.

[24] Sobolev S.L., *Application of functional analysis in mathematical physics*, Transl. of Math. Mono. **7**, Amer. Math. Soc., 1963.

[25] Stein E., *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series **30**, Princeton Univ. Press, 1970.

[26] Verchota G., *Layer potentials and regularity for de Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal. **59**, 1984, 572-611.

[27] Yan Y., Sloan I.H., *On integral equations of the first kind with logarithmic kernels*, J. Integral Equations and Applications **1** (4), 1988, 1-31.

Institut de Mathématique
Université de Liège
Grande Traverse 12, B-4000 Liège
Belgique