

## INFLUENCE DU CHAMP MAGNÉTIQUE SUR L'INSTABILITÉ THERMOCONVECTIVE DE BENARD-MARANGONI

A. KADDAME

Service de Thermomécanique des Phénomènes Irréversibles,  
Université de Liège, B5, Sart-Tilman, B-4000 Liège (Belgique)

## INFLUENCE OF A MAGNETIC FIELD ON BENARD-MARANGONI THERMOCONVECTIVE INSTABILITY

### Abstract

One examines the problem of the convective instability in a horizontal layer of a conductive fluid submitted to a horizontal magnetic field and heated from below. The upper surface of the fluid is subject to a temperature-dependent surface tension. The originality of the present work is the orientation of the magnetic field which is usually assumed to be normal to the fluid layer and the coupling between both buoyancy (Bénard problem) and surface tension (Marangoni problem) effects. Only infinitesimally small disturbances are considered.

*Mots-clés : instabilités – thermocapillarité – Champ magnétique*

*Key-words : instabilities – thermocapillarity – magnetic field*

### 1. INTRODUCTION

On considère une mince couche de fluide électriquement conductrice disposée horizontalement et soumise à un champ magnétique  $H$  uniforme dans la direction horizontale. L'épaisseur du fluide est  $d$  et ses dimensions latérales sont supposées infiniment grandes par rapport à l'épaisseur. On applique une différence de température  $\Delta T$  entre les deux surfaces horizontales du fluide, en chauffant uniformément par la surface inférieure. Dès que  $\Delta T$  dépasse une valeur critique  $\Delta T^c$ , on observe un mouvement de convection avec une vitesse  $\vec{u}$ .

Le caractère original du présent travail réside dans l'orientation du champ magnétique. Les travaux antérieurs concernent en effet le problème d'un champ magnétique dans une direction verticale [1], ou légèrement incliné par rapport à la verticale [2,3]. En outre, on examine le problème du couplage entre les effets de gravité et de tension superficielle (problème de Bénard-Marangoni) alors que la plupart des articles sont relatifs aux problèmes découplés : soit celui de Bénard [2], soit celui de Marangoni [4,5].

L'analyse est limitée à de petites perturbations infinitésimales de température et de vitesse, ce qui nous autorise à linéariser les équations de champ.

*Présenté par G. Lebon, le 19 décembre 1991*

## 2. FORMULATION DU PROBLEME

Dans l'approximation de Boussinesq, les équations linearisées gouvernant les perturbations  $h_z$ ,  $w$  et  $\theta$ , du champ magnétique, de la vitesse verticale et de la température sont données par [2] :

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} = \eta \nabla^2 h_z + H_j \frac{\partial w}{\partial x_j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 w}{\partial t} = g\alpha \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + \nu \nabla^4 w + \mu/\rho H_j \frac{\partial \nabla^2 h_z}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \beta w + \chi \nabla^2 \theta \quad (3)$$

où  $\rho$  est la masse spécifique du fluide donnée par

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (4)$$

$\alpha$  est le coefficient d'expansion thermique,  $\rho_0$  la masse spécifique à la température de référence  $T_0$ ,  $\nu$  la viscosité cinématique,  $\chi$  la diffusivité thermique,  $g$  la gravité,  $\eta$  la résistivité,  $\mu$  la perméabilité et  $\beta$  le gradient de température constant observé dans l'état de référence de repos, on fait aussi l'hypothèse de sommation sur les indices répétés,  $x$  et  $y$  sont les coordonnées horizontales et  $\nabla^2$  l'opérateur Laplacien.

Le champ magnétique  $\vec{H}$  est supposé horizontale et orienté le long de l'axe unitaire  $\vec{e}_x$  :

$$\vec{H} = H \vec{e}_x \quad (5)$$

Le problème étant de nature linéaire, la solution des équations (1)-(3) peut toujours s'exprimer en fonction de modes normaux.

Supposons que les perturbations sont caractérisées par un nombre d'onde horizontal  $\vec{k}$  faisant l'angle  $\varphi$  avec  $\vec{H}$  de sorte que:

$$\vec{H} \cdot \vec{k} = H k \cos\varphi \quad (6)$$

On peut alors écrire:

$$(w, \theta, h_z) = (W(z), \tilde{\theta}(z), K(z)) \exp [i(k_x x + k_y y) + pt] \quad (7)$$

où  $W(z), \tilde{\theta}(z)$  et  $K(z)$  désignent les amplitudes des perturbations et  $p$  une constante qui peut être complexe. En vue de rendre les équations adimensionnelles, on utilise les échelles suivantes:

$$Z = z/d, a = kd, \sigma = pd^2/\nu, p_1 = \nu/\chi \text{ et } p_2 = \nu/\eta \quad (8)$$

Substituant (7) dans les équations de bilan (1)-(3), on obtient pour les amplitudes  $W, \tilde{\theta}$  et  $K$  les équations suivantes :

$$(D^2 - a^2 - p_2\sigma) K = -\frac{iHa\cos\phi d}{\eta} W \quad (9)$$

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - \sigma) W + \frac{\mu d}{\rho\nu} iHa \cos\phi (D^2 - a^2) K = \frac{g\alpha a^2 d^2}{\nu} \tilde{\theta} \quad (10)$$

$$(D^2 - a^2 - p_1\sigma) \tilde{\theta} = -\frac{\beta d^2}{\chi} W \quad (11)$$

où on a posé  $D = \frac{d}{dZ}$ .

Examinons à présent les conditions requises pour obtenir la stabilité marginale, qui correspond à  $\text{Re } \sigma = \text{Im } \sigma = 0$  [2]. Dans un travail soumis à publication nous avons montré que le principe d'échange de stabilité est valide dans le cas où  $p_2 < p_1$  ( $\chi < \eta$ ), ce qui correspond aux conditions de travail habituelles.

On obtient, après élimination de  $K$  entre les deux équations (9) et (10),

$$(D^2 - a^2)^2 W + Q a^2 \cos\phi^2 W = Ra a^2 \Phi \quad (12)$$

$$(D^2 - a^2) \Phi = -W \quad (13)$$

où  $Q, \Phi$  et  $Ra$  (nombre de Rayleigh) sont les nombres sans dimensions suivant :

$$Q = \mu H^2 d^2 / \rho \nu \eta, \Phi = \chi / \beta d^2 \tilde{\theta} \text{ et } Ra = \alpha g \beta d^4 / \nu \chi \quad (14)$$

### 3. ETUDE DU PROBLEME DANS DEUX CAS PARTICULIERS

#### 3.1. Cas de deux surfaces horizontales libres et parfaitement conductrices de la chaleur.

Les conditions aux limites sont

$$W = \Phi = D^2W = 0 \quad \text{en } Z = 0 \text{ et } Z = 1 \quad (15)$$

En combinant (12) et (13) pour éliminer  $\Phi$  on obtient

$$(D^2 - a^2) [(D^2 - a^2)^2 + Q a^2 \cos\phi^2] W = -Ra a^2 W \quad (16)$$

La méthode de résolution consiste à multiplier (16) par  $W$  et à intégrer de 0 à 1, il vient :

$$Ra = \frac{\int_0^1 [(D^3W)^2 + 3a^2(D^2W)^2 + (3a^4 + Qa^2\cos\phi^2)(DW)^2 + (a^6 + Qa^4\cos\phi^2)W^2] dZ}{a^2 \int_0^1 W^2 dZ} \quad (17)$$

La solution générale de (16) qui satisfait aux conditions limites (15) est de la forme :

$$W = A \sin \pi Z \quad (18)$$

En substituant cette solution dans l'expression (17) de  $Ra$ , on trouve

$$Ra = [(\pi^2 + a^2)^2 + Qa^2\cos\phi^2] \frac{(\pi^2 + a^2)}{a^2} \quad (19)$$

On constate que  $Ra$  atteint sa valeur critique  $Ra_c$ , c'est-à-dire sa valeur minimum quand l'égalité suivante est vérifiée :

$$2 X_c^3 + 3 X_c^2 = 1 - Q_1 X_c^2 \cos\phi^2 \quad (20)$$

où on a posé :

$$X_c = \frac{a_c^2}{\pi^2}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\pi^2} \quad (21)$$

L'indice  $c$  indique que la solution se rapporte à l'état critique. La substitution de la valeur critique  $X_c$  (ou  $a_c$ ) dans (19) donne la valeur de  $Ra$  critique.

On remarque d'après les expressions (19) et (20) que  $Ra_c$  et  $X_c$  varient périodiquement en fonction de  $\varphi$  : pour  $\varphi = k\pi$ ,  $Ra_c$  est maximum et  $X_c$  est minimum; pour  $\varphi = (2k + 1)\pi/2$ ,  $Ra_c$  est minimum et  $X_c$  est maximum.

On observe (voir tableau 1) que si  $\varphi \neq (2k + 1)\pi/2$ ,  $Ra_c$  croît tandis que  $X_c$  décroît en fonction de  $Q_1$  ce qui indique que le champ magnétique joue un rôle stabilisant.

Les résultats indiquent que si on chauffe le fluide par le bas, les modes pour lesquels les cellules ont un nombre d'onde normal au champ magnétique sont les plus instable, c'est donc ce type de cellules qui sera observé plutôt que celui pour lequel le nombre d'onde est parallèle au champ magnétique.

On remarque aussi que pour des grandes valeurs de  $Q_1$  et pour  $\varphi \neq (2k + 1)\pi/2$ , il vient d'après (19) et (20),

$$X_c \cong \frac{1}{\sqrt{Q_1 \cos^2 \varphi}} \tag{22}$$

$$Ra_c \cong \pi^4 (1 + X_c) Q_1 \cos^2 \varphi \tag{23}$$

Tableau 1

Nombre de Rayleigh et nombre d'onde critiques pour deux surfaces libres en fonction du champ magnétique.									
$X_c = \frac{a_c^2}{\pi^2}, \quad Ra_{1c} = \frac{Ra_c}{\pi^4}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\pi^2}$									
$\varphi$	20		100		200		800		
	$X_c$	$Ra_{1c}$	$X_c$	$Ra_{1c}$	$X_c$	$Ra_{1c}$	$X_c$	$Ra_{1c}$	
0	0,21	33	0,1	123	0,07	231	0,04	860	
$\pi/4$	0,27	20	0,14	65	0,1	120	0,05	431	
$\pi/2$	0,5	6,7	0,5	6,75	0,5	6,750	0,5	6,7	
$3\pi/4$	0,27	20	0,14	66	0,1	120	0,05	431	
$\pi$	0,21	33	0,1	123	0,07	231	0,04	860	

3.2. Surface inférieure rigide et parfaitement conductrice de la chaleur, surface supérieure soumise à une tension de surface  $\xi(T)$  et isolée thermiquement.

Les équations de base sont les mêmes que dans le paragraphe précédent, seules les conditions aux limites sont modifiées. Au lieu de (15), on a maintenant :

$$W = \Phi = DW = 0 \quad \text{en } Z = 0 \quad (\text{a.24})$$

$$W = D\Phi = 0 \text{ et } D^2W = -Ma a^2\Phi \quad \text{en } Z = 1 \quad (\text{b.24})$$

Ma est le nombre de Marangoni défini par [5,6]

$$Ma = - \frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial T}\right) \beta d^2}{\rho \nu \chi} \quad (25)$$

On vérifie que le principe variationnel ci-dessous

$$\delta J = 0 \quad (26)$$

avec

$$J = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{Ra a^2} ((D^2W)^2 + 2a^2(DW)^2 + a^2(a^2 + Q \cos\varphi^2) W^2) + (D\Phi)^2 + a^2\Phi^2 - 2W\Phi \right\} dZ + 2 \frac{Ma}{Ra} \overline{(\Phi DW)}_{Z=1} \quad (27)$$

possède comme équations d'Euler-Lagrange les équations du problème. Le "-" surmontant  $\Phi$  signifie que cette quantité est gelée au cours du processus de variation. Ici on ne peut pas écrire un vrai principe variationnel car le problème est non auto-adjoint.

Comme au paragraphe précédent le problème posé par les équations de base est un problème aux valeurs propres. En vue de le résoudre, recherchons pour  $W$  et  $\Phi$  des solutions approchées de la forme

$$W = AW_1 \quad \text{avec } W_1 = Z^2(1-Z^2) \quad (28)$$

$$\Phi = B\Phi_1 \text{ et } \bar{\Phi} = \bar{B}\Phi_1 \quad \text{avec } \Phi_1 = Z(1 - Z/2) \quad (29)$$

A et B sont des constantes inconnues,  $\bar{B}$  ne sera pas considéré comme inconnue, mais sera identifié à B à l'issue des opérations d'extrémalisation [7].

Puisque J est extremum, on doit avoir

$$\frac{\partial J}{\partial A} = 0 \text{ et } \frac{\partial J}{\partial B} = 0 \quad (30)$$

ce qui conduit à deux équations en les deux inconnues A et B.

On vérifie que la solution du problème posé par (30) est non triviale à la condition que :

$$Ma = \frac{23}{420} Ra + \frac{420}{23 a^2} \left( \frac{84}{5} + \frac{88}{105} a^2 + a^2(a^2 + Q \cos\varphi^2) \frac{8}{315} \right) \left\{ \frac{1}{3} + \frac{2}{15} a^2 \right\} \quad (31)$$

On remarque que, pour Ra fixé, Ma atteint son minimum pour une valeur du nombre d'onde  $\alpha_c = a_c^2$  vérifiant l'égalité suivante

$$\frac{8}{315} \alpha_c^3 + \frac{4302}{9765} \alpha_c^2 = 21 - \frac{4}{315} Q \alpha_c^2 \cos\varphi^2 \quad (32)$$

On déduit que pour Ra fixé et  $\varphi \neq (2k + 1) \pi/2$ ,  $Ma_c$  croît en fonction de Q et  $\alpha_c$  décroît en fonction de Q. Comme au paragraphe précédent,  $Ma_c$  et  $\alpha_c$  varient périodiquement en fonction de  $\varphi$  : pour  $\varphi = k\pi$ ,  $Ma_c$  passe par un maximum,  $\alpha_c$  passe par un minimum, pour  $\varphi = (2k + 1) \pi/2$ ,  $Ma_c$  passe par un minimum,  $\alpha_c$  passe par un maximum.

Nous avons représenté sur la figure 1 les courbes  $Ma_c$  en fonction de  $Ra_c$ , pour diverses valeurs Q du champ magnétique. Pour Q=0, on retrouve la droite de Nield [6] tandis que pour des valeurs croissantes de Q, les courbes restent des droites du moins pour des valeurs de  $Ra_c$  inférieures à 200. Nous n'avons pas poussé les investigations plus loin car l'extrême simplicité des fonctions d'essai ne permet plus d'obtenir des résultats significatifs.

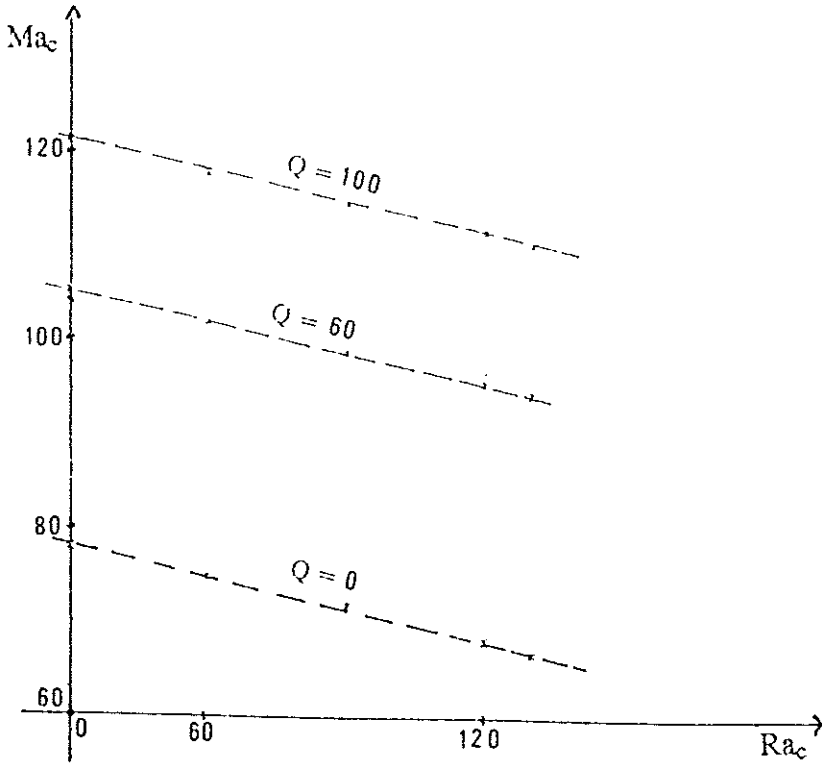


Fig. 1. Nombre de Marangoni critique en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes valeurs de  $Q$  et  $\varphi=0$ .

#### 4. CONCLUSIONS

L'étude de l'influence du champ magnétique horizontal sur l'instabilité thermoconvective de Bénard-Marangoni montre que le nombre de Marangoni critique croît avec l'intensité du champ magnétique, tandis que le nombre d'onde critique décroît en fonction de celui-ci.

On observe aussi une dépendance périodique du nombre de Marangoni critique et du nombre d'onde critique en fonction de l'orientation du nombre d'onde par rapport à la direction du champ magnétique. Rappelons que dans les études antérieures relatives aux problèmes particuliers d'un nombre de Marangoni nul [2], et d'un nombre de Rayleigh nul [4], avec un champ magnétique vertical, ont mis en évidence une dépendance croissante du nombre de Rayleigh (ou Marangoni) critique et du nombre d'onde critique en fonction du champ magnétique.

Dans cet article, on a choisi des fonctions d'essai très simples pour les amplitudes de la vitesse et de la température, ceci nous a permis d'obtenir une idée du comportement qualitatif du nombre de Marangoni critique et du nombre d'onde critique en nous basant sur une approche purement analytique. Une étude plus approfondie du problème considérant un champ magnétique incliné par rapport à la verticale et des fonctions d'essai plus compliquées est en cours.



## Remerciements

Ce texte présente des résultats de recherche du Programme Pôles d'Attraction Interuniversitaire (projets n° 21 et 29) mis en oeuvre à l'initiative de l'Etat Belge, Services du Premier Ministre, Programmation de la Politique Scientifique. L'auteur en assume la responsabilité scientifique. Nous remercions le Professeur G. LEBON pour son intérêt et ses conseils.

## REFERENCES

- [1] : D. A. NIELD, Surface tension and buoyancy effect in the cellular convection of an electrically conducting liquid in a magnetic field, *Z. Angew. Math. Phys.* 17, 131-139 (1966).
- [2] : S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Clarendon Press, London (1961).
- [3] : TOHRU MAEKAWA and ICHIRO TANASAWA, Effect of magnetic field on onset of Marangoni convection, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol 31, N°2, 289-293(1988).
- [4] : N. RUDRAIAH, V. RAMACHANDRAMURTHY and O. P. CHANDNA, Effects of magnetic field and non-uniform temperature gradient on Marangoni convection, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 28, 1621-1624 (1985).
- [5] : J. R. A. PEARSON, On convective cells induced by surface tension, *J. Fluid Mech.* 4, 489-500 (1958).
- [6] : D. A. NIELD, Surface tension and buoyancy effect on cellular convection, *J. Fluid Mech* 19, 341-352 (1964).
- [7] : P. GLANSDORFF and I. PRIGOGINE, *Structure, stability and fluctuations*, J. Wiley, New-York, (1971).