Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 51e année, nº 5-8, 1982, pp. 174-187

SUR DES CONGRUENCES D'UN ENSEMBLE ORDONNÉ. APPLICATION A L'ÉTUDE DU LATTIS DES SOUS-ALGÈBRES D'UN DEMI-LATTIS DE BROUWER FINI

par L. VRANCKEN-MAWET

SUMMARY

In this paper, we investigate the subalgebra lattice of a finite Brouwerian semilattice. Among other things, we prove that this lattice is always atomistic, lower semimodular and sectionally complemented. We also characterize those finite Brouwerian semilattices whose subalgebra lattice is dually atomistic, relatively complemented, modular, semimodular, Boolean, distributive or unicomplemented.
To achieve these results, we use the duality studied by Köhler between finite Brouwerian semilattices and finite posets.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'étudier le lattis des sous-algèbres d'un demi-lattis de Brouwer fini. La méthode utilisée est basée sur une dualité établie par Köhler dans [3] pour la catégorie des demi-lattis de Brouwer finis. La catégorie duale admet pour objets les ensembles ordonnés finis et pour morphismes des applications partielles (c'est-à-dire des fonctions) satisfaisant certaines propriétés supplémentaires ([3]), c'est pourquoi nous consacrons le chapitre 1 à l'étude de congruences que nous introduisons sur tout ensemble ordonné X. Nous donnons une structure d'ordre à l'ensemble Con(X) des congruences de X, qui l'érige en lattis complet.

Dans le chapitre 2, nous caractérisons les atomes et les atomes duaux de Con(X). Nous en établissons le caractère dualement atomistique et semi-modulaire et nous démontrons qu'il admet toujours des sections finissantes complémentées.

Le chapitre 3 donne une caractérisation des ensembles ordonnés X dont le lattis des congruences Con(X) est respectivement atomistique, relativement complémenté, modulaire, dualement semi-modulaire, booléen, distributif ou unicomplémenté.

Enfin, dans le quatrième chapitre, en utilisant la dualité signalée plus haut, nous traduisons ces résultats et obtenons des propriétés du lattis des sous-algèbres d'un demi-lattis de Brouwer fini.

NOTATIONS GÉNÉRALES

Comme d'habitude, nous confondons sous un même symbole toute algèbre et son support. De même, pour désigner un ensemble ordonné, nous écrivons souvent X en lieu et place de $\langle X, \leqslant \rangle$.

Présenté par L. Nollet, le 17 juin 1982.

Les symboles $\cup$, $\cap$, —, $\times$ ont leur signification ensembliste habituelle : union, intersection, complémentaire ou différence, produit cartésien.

Un *idéal d'ordre* (resp. *filtre d'ordre*) d'un ensemble ordonné X est un sous-ensemble de X qui contient les éléments inférieurs (resp. supérieurs) à ses éléments. A tout élément x de X, on peut associer l'idéal (resp. le filtre) d'ordre engendré par x. C'est l'ensemble des éléments inférieurs (resp. supérieurs) ou égaux à x. On le note $(x]$ (resp. $[x)$). L'ensemble des éléments strictement inférieurs (resp. supérieurs) à x est noté $(x[$ (resp. $]x)$). L'idéal d'ordre (resp. le filtre d'ordre) engendré par un sous-ensemble A de X et noté (A] (resp. [A)) est l'union des idéaux d'ordre (resp. filtres d'ordre) engendrés par ses éléments.

Rappelons qu'un élément x de X pour lequel il n'existe aucun élément qui lui soit strictement inférieur est dit *minimal*. L'ensemble des éléments minimaux de X est noté Min X.

Si x et y sont des éléments de X, on dit que *x est couvert par y* (ou *y couvre x*) lorsque $x < y$ et qu'il n'existe aucun élément strictement compris entre x et y, ce que l'on note $x \prec y$.

L'algèbre de Boole à k atomes ($k \in \mathbb{N}$) est notée 2^k.

Rappelons ([1]) en outre que la *somme ordinale* $X \oplus Y$ de deux ensembles ordonnés disjoints X et Y est l'ensemble $X \cup Y$ sur lequel on définit la structure d'ordre suivante : lorsque $x \in X$ (resp. $x \in Y$) et $y \in X$ (resp. $y \in Y$), le symbole $x \leqslant y$ garde la même signification que dans X (resp. Y). De plus, on a $x < y$, pour tout $x \in X$ et pour tout $y \in Y$.

Si X_1 et X_2 sont des ensembles ordonnés, nous serons amenés à considérer des applications partielles α de X_1 vers X_2. L'ensemble des éléments de X_1 où α est défini est noté dom α. De même, si X est un ensemble ordonné, nous étudierons certaines équivalences définies sur une partie Y de X. Lorsque le domaine Y d'une telle équivalence est différent de X, nous le notons en indice. Ainsi θ_Y désigne un élément du lattis des équivalences Eq(Y) définies sur la partie Y de X. Une classe de l'équivalence θ_Y est appelée θ_Y-classe. De plus, nous écrivons souvent $x\,\theta_Y\,t$ au lieu de $(x, t) \in \theta_Y$.

Si θ_Y est un élément de Eq(Y)($Y \subset X$) et Z, une partie de Y, nous utilisons la notation $\theta_Y \mid_Z$ pour désigner $\theta_Y \cap (Z \times Z)$. Une telle partie Z est dite *θ_Y-saturée* lorsqu'elle est une union de θ_Y-classes.

Le supremum dans Eq(Y) ($Y \subset X$) de deux équivalences θ_Y et φ_Y est noté $\theta_Y \vee_{\mathrm{eq}(Y)} \varphi_Y$. Si $Y = X$, on peut omettre l'indice Y.

Un *demi-lattis de Brouwer* $A = \langle A, \wedge, *, 1\rangle$ est un demi-lattis $\langle A, \wedge, 1\rangle$ (nécessairement distributif) sur lequel on définit une opération binaire $*$ qui, au couple (x, y) associe le pseudo-complément relatif de x par rapport à y, noté $x * y$ et qui se définit comme suit :

$$z \wedge x \leqslant y \Leftrightarrow z \leqslant x * y, \text{ pour tout } z \in A.$$

CONGRUENCES SUR UN ENSEMBLE ORDONNÉ $\langle X, \leqslant\rangle$

Si X_1 et X_2 sont deux ensembles ordonnés, Köhler ([3], p. 20) appelle *morphisme* de X_1 vers X_2 toute application partielle α de X_1 vers X_2 satisfaisant l'égalité

(*) $$((x[\, \cap \text{ dom } \alpha)\alpha = (x\alpha[, \text{ pour tout } x \in \text{dom } \alpha.$$

Cette notion de morphisme permet d'introduire celle de congruence sur un ensemble ordonné X.

Une équivalence θ_Y définie sur une partie Y de X est appelée *congruence* sur X si et seulement si l'ensemble quotient Y / θ_Y peut être muni (de façon nécessairement unique) d'une structure ordonnée telle que la fonction canonique surjective $X \to Y / \theta_Y$ soit un morphisme.

En fait, si C_1 et C_2 sont des éléments de Y / θ_Y, on a $C_1 < C_2$ si et seulement s'il existe $x \in C_1$, $y \in C_2$ tels que $x < y$. Dès lors, on voit que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équivalence θ_Y soit une congruence sont les suivantes :

(i) pour tout $p \in Y, q \in Y, r \in Y$, si $p < q \, \theta \, r$, alors il existe $s \in Y$ tel que $p \, \theta \, s < r$,

(ii) les θ_Y-classes sont des antichaînes.

Pour définir une structure d'ordre sur l'ensemble Con(X) des congruences sur X, considérons des congruences θ_{Y_1} et θ_{Y_2}. Soit R la relation définie par

$$\theta_{Y_1} R \theta_{Y_2} \text{ si et seulement si } \begin{cases} \text{a) } Y_2 \subset Y_1 \text{ et } Y_1 \text{ est } \theta_{Y_2}\text{-saturé,} \\ \text{b) } \theta_{Y_1} \mid {}_{Y_2} \subset \theta_{Y_2}. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que R est une relation d'ordre; nous la noterons $\leqslant$.

1.1. Théorème. *Soit* X *un ensemble ordonné. Si* θ_{Y_1} *et* θ_{Y_2} *sont des éléments de* Con(X) *et si nous désignons par* π_1 (*resp.* π_2) *le morphisme canonique surjectif* $X \to Y_1 / \theta_{Y_1}$ (*resp.* $X \to Y_2 / \theta_{Y_2}$), *on a* $\theta_{Y_1} \leqslant \theta_{Y_2}$ *si et seulement s'il existe un morphisme surjectif unique* $h : Y_1 / \theta_{Y_1} \to Y_2 / \theta_{Y_2}$ *tel que* $\pi_1 h = \pi_2$.

Démonstration. Si $\theta_{Y_1} \leqslant \theta_{Y_2}$, il suffit de montrer que l'application partielle h dont le domaine est $\{x^{\theta_{Y_1}}, x \in Y_2\}$ et qui se définit par $x^{\theta_{Y_1}} h = x^{\theta_{Y_2}}$ pour tout $x^{\theta_{Y_1}} \in \operatorname{dom} h$, est un morphisme surjectif $h : Y_1 / \theta_{Y_1} \to Y_2 / \theta_{Y_2}$ tel que $\pi_1 h = \pi_2$. L'unicité d'un tel morphisme est d'ailleurs évidente. Inversement, s'il existe un morphisme h de Y_1 / θ_{Y_1} dans Y_2 / θ_{Y_2} tel que $\pi_1 h = \pi_2$, l'égalité des domaines de $\pi_1 h$ et de π_2 impose que la condition a) soit vérifiée. Dès lors, sur Y_2, si $x \theta_{Y_1} y$, on a $x \pi_1 h = y \pi_1 h$ et donc $x \theta_{Y_2} y$, d'où la conclusion.

1.2. Remarques.

I. La congruence $\varnothing$ est le maximum de Con(X).

II. L'identité sur toute partie Y de X est une congruence notée ω_Y. En particulier, ω_X (ou ω) est le minimum de Con(X).

III. L'équivalence universelle sur une partie Y de X est une congruence si et seulement si Y est une antichaîne. Elle est notée ι_Y.

IV. Si p, q sont des éléments de X, nous noterons $\theta_{(p,q)}$ l'équivalence sur X engendrée par $\{p, q\}$. On vérifie sans peine que $\theta_{(p,q)} \in \operatorname{Con}(X)$ si et seulement si $(p[= (q[$.

1.3. Lemme. *Soit* $\mathscr{F} = (\theta_{Y_i} \mid i \in I)$ *une famille de congruences sur* X. *Soit* $\mathscr{G}$ *l'ensemble ordonné par inclusion des parties* U *de* $\cap \{Y_i \mid i \in I\}$ *qui sont*

I) θ_{Y_i}*-saturées, pour tout* $i \in I$ *et telles que*

II) *l'équivalence* $\vee_{\mathrm{eq(U)}} \{\theta_{Y_i} \mid i \in I\}$ *admet pour classes des antichaînes.*

Alors le supremum dans Con(X) *de la famille* $\mathscr{F}$ *existe et vaut*

$$\vee_{\mathrm{eq}(\cup\mathscr{G})} \{\theta_{Y_i} \mid_{\cup\mathscr{G}} \mid \theta_{Y_i} \in \mathscr{F}\}.$$

Démonstration. α) On vérifie sans peine que l'équivalence de domaine U

$$\vee_{\mathrm{eq}(U)} \{\theta_{Y_i} \mid_U \mid \theta_{Y_i} \in \mathscr{F}\}$$

est une congruence, pour tout $U \in \mathscr{G}$.

β) Il est évident que $\mathscr{G}$ n'est pas vide puisque $\varnothing \in \mathscr{G}$. De plus, $\cup \mathscr{G} \in \mathscr{G}$. En effet, $\cup \mathscr{G}$ est une partie de $\cap \{Y_i \mid i \in I\}$, qui, pour tout $i \in I$ est θ_{Y_i}-saturée. Si la relation

$$\vee_{\mathrm{eq}(\cup\mathscr{G})} \{\theta_{Y_i} \mid_{\cup\mathscr{G}} \mid \theta_{Y_i} \in \mathscr{F}\}$$

contenait un couple (x, y) tel que $x < y$, il existerait une suite finie $x_0 = x, x_1, \dots, x_n$ telle que

$$x_0(\theta_{Y_{i_0}} \mid_{\cup\mathscr{G}})\, x_1 \dots x_n (\theta_{Y_{i_n}} \mid_{\cup\mathscr{G}}) y,$$

$i_k \in I$ pour tout $k = 0, \dots, n$.

Or, si $x = x_0 \in U_0 \in \mathscr{G}$, comme U_0 est $\theta_{Y_{i_k}}$-saturée, il vient successivement $x_1 \in U_0, \dots, x_n \in U_0, y \in U_0$ avec $x < y$, ce qui est impossible vu la condition II) imposée à U_0.

γ) Comme on a

$$\theta_{Y_i} \leqslant \vee_{\mathrm{eq}(U)} \{\theta_{Y_i} \mid_U \mid i \in I\}, \text{ pour tout } U \in \mathscr{G},$$

il reste à prouver que, si une congruence φ_Z est supérieure ou égale à θ_{Y_i}, pour tout $i \in I$, alors

$$\varphi_Z \geqslant \vee_{\mathrm{eq}(\cup\mathscr{G})} \{\theta_{Y_i} \mid_{\cup\mathscr{G}} \mid i \in I\}.$$

Or, de $\varphi_Z \geqslant \theta_{Y_i}$, pour tout $i \in I$, on déduit que

(i) $Z \subset \cap \{Y_i \mid i \in I\}$,

(ii) Z est θ_{Y_i}-saturé, pour tout $i \in I$.

Comme $\theta_{Y_i} \mid_Z \subset \varphi_Z$, l'équivalence $\vee_{\mathrm{eq}(Z)}\{\theta_{Y_i} \mid_Z \mid i \in I\}$ est incluse dans φ_Z et admet donc des classes qui sont des antichaînes. Ainsi $Z \in \mathscr{G}$ et donc $Z \subset \cup \mathscr{G}$.

En vertu de γ) (ii), il est évident que Z est une union de classes de la relation

$$\vee_{\mathrm{eq}(\cup\mathscr{G})} \{\theta_{Y_i} \mid_{\cup\mathscr{G}} \mid i \in I\}.$$

Enfin, si $(x, y) \in Z \times Z$ et s'il existe dans $\cup \mathscr{G}$ une suite finie $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ telle que

$$x_0\theta_{Y_{i_0}}\, x_1 \dots x_n\, \theta_{Y_{i_n}}\, y (i_k \in I \text{ pour tout } k = 0, \dots, n),$$

de γ) (ii), on déduit successivement $x_1 \in Z, \dots, x_n \in Z$ et donc $x_0 \varphi_Z x_1 \dots x_n \varphi_Z y$ d'où il vient $x \varphi_Z y$, ce qui permet de conclure.

1.4. Théorème. *Muni de la structure d'ordre susdite, l'ensemble* Con(X) *des congruences d'un ensemble ordonné* X *est un lattis complet.*

Démonstration. Comme Con(X) admet un élément minimum ω, il suffit d'utiliser le lemme 1.3 pour conclure.

1.5. REMARQUE. Nous n'avons pas obtenu de description générale de l'infimum d'une famille $\mathscr{F} = \{\theta_{Y_i} \mid i \in I\}$ de congruences sur X. On voit néanmoins que son domaine est toujours $\cup \{Y_i \mid i \in I\}$. En effet, soit $\varphi_Z = \wedge \{\theta_{Y_i} \mid i \in I\}$. De $\varphi_Z \leqslant \theta_{Y_i}$, pour tout $i \in I$, on déduit que

$$\cup \{Y_i \mid i \in I\} \subset Z.$$

De plus, comme $\omega_{\cup\{Y_i \mid i \in I\}} \leqslant \theta_{Y_i}$, pour tout $i \in I$, on a $\omega_{\cup\{Y_i \mid i \in I\}} \leqslant \varphi_Z$ et donc $Z \subset \cup \{Y_i \mid i \in I\}$, d'où la conclusion.

1.6. THÉORÈME. *Si* θ_Y *est une congruence sur un ensemble ordonné* X, *il existe un isomorphisme entre* $\mathrm{Con}(Y/\theta_Y)$ *et le lattis des congruences sur* X *qui sont supérieures ou égales à* θ_Y.

Démonstration. Il suffit d'associer à chaque congruence φ_Z supérieure ou égale à θ_Y l'équivalence $\varphi^*_{Z^*}$ dont le domaine Z^* est l'ensemble des θ_Y-classes incluses dans Z et que l'on définit comme suit : pour tout $C_1 \in Z^*$, pour tout $C_2 \in Z^*$, on a $C_1 \varphi^*_{Z^*} C_2$ si et seulement s'il existe $x \in C_1$, $y \in C_2$ tels que $x \varphi_Z y$.

On vérifie sans peine que $\varphi^*_{Z^*}$ est une congruence de Y/θ_Y et que l'application $\varphi_Z \to \varphi^*_{Z^*}$ est bijective.

Pour prouver qu'elle est isotone, considérons deux congruences φ_Z et α_T telles que $\theta_Y \leqslant \varphi_Z \leqslant \alpha_T$. Il vient

$$Z^* = \mathrm{dom}\, \varphi^*_{Z^*} = \{x^{\theta_Y} \mid x \in Y, x^{\theta_Y} \subset Z\} \supset \{x^{\theta_Y} \mid x \in Y, x^{\theta_Y} \subset T\} = T^*$$

De plus, dès que $x^{\theta_Y} \in Z^* - T^*$, on a $x^{\theta_Y} \subset Z - T$ et donc

$$(x^{\theta_Y})^{\varphi^*_{Z^*}} = \{y^{\theta_Y} \mid x \varphi_Z y\} \subset Z^* - T^*.$$

Enfin, si $x^{\theta_Y} \varphi^*_{Z^*} \mid_{T^*} y^{\theta_Y}$, on a $x \theta_Y x' \varphi_Z|_T y' \theta_Y y$, d'où on déduit $x \theta_Y x' \alpha_T y' \theta_Y y$, de sorte que $x^{\theta_Y} \alpha^*_{T^*}\, y^{\theta_Y}$, d'où la conclusion.

L'application réciproque associe à toute congruence φ de Y/θ_Y la congruence φ' supérieure ou égale à θ_Y définie sur $\cup\, \mathrm{dom}\, \varphi$ et telle que $x \varphi' y$ si et seulement si $x^{\theta_Y} \varphi y^{\theta_Y}$. Pour démontrer qu'elle est isotone, considérons deux congruences φ et ψ de Y/θ_Y telles que $\varphi < \psi$. Il vient $\mathrm{dom}\, \psi' = \cup\, \mathrm{dom}\, \psi \subset \cup\, \mathrm{dom}\, \varphi = \mathrm{dom}\, \varphi'$.

De plus, si $x \in \mathrm{dom}\, \varphi' - \mathrm{dom}\, \psi'$, alors $x^{\theta_Y} \in \mathrm{dom}\, \varphi - \mathrm{dom}\, \psi$, de sorte que $(x^{\theta_Y})^{\varphi} \cap \mathrm{dom}\, \psi = \varnothing$ et donc $x^{\varphi'} \cap \mathrm{dom}\, \psi' = \varnothing$.

Enfin, si $x \in \mathrm{dom}\, \psi$, $y \in \mathrm{dom}\, \psi$ et si $x \varphi' y$, on a $x^{\theta_Y} \varphi y^{\theta_Y}$, d'où on déduit $x^{\theta_Y} \psi y^{\theta_Y}$ et donc $x \psi' y$.

2. PROPRIÉTÉS DU LATTIS DES CONGRUENCES D'UN ENSEMBLE ORDONNÉ X

2.1. THÉORÈME. *Les atomes de* $\mathrm{Con}(X)$ *sont les congruences* $\theta_{(p,q)}$ *de domaine* X *définies en* 1.2 IV) $((p[= (q[)$ *et les identités sur les complémentaires des singlets.*

Démonstration. α) Il est évident que les congruences susdites sont *atomiques* (c'est-à-dire des atomes de $\mathrm{Con}(X)$).

β) Démontrons que les équivalences $\theta_{(p,q)}$ où $(p[= (q[$ sont les seules congruences atomiques de domaine X.

a) D'une part, toute classe d'une congruence atomique θ de domaine X admet au plus deux éléments. Sinon, soit C une θ-classe contenant trois éléments x, y, z. Comme C est une antichaîne, on a $x \notin (y] \cup (z]$.

L'équivalence ψ de domaine X définie par

$$\psi = (\theta \cap ((y] \cup (z]) \times ((y] \cup (z]))) \cup \psi$$

est une congruence distincte de ω, incluse strictement dans θ, d'où la conclusion.

b) D'autre part, toute congruence atomique θ de domaine X admet une seule classe distincte d'un singlet. Sinon, soient C_1, C_2 deux θ-classes distinctes d'un singlet. Si $[C_1) \cap C_2 \neq \varnothing$ et si $[C_2) \cap C_1 \neq \varnothing$, il existe $t, u \in C_1, x, y \in C_2$ tels que $t < x$ et $y < u$. De $t < x \, \theta \, y$, on déduit qu'il existe $v \in C_1$ tel que $t \, \theta \, v < y < u$, ce qui est impossible puisque C_1 est une antichaîne.

Supposons que $[C_1) \cap C_2 = \varnothing$. L'équivalence ψ de domaine X définie par

$$\psi = (\theta \cap (-[C_1) \times -[C_1))) \cup \omega$$

est une congruence distincte de ω, incluse strictement dans θ et interdit donc à θ d'être atomique.

c) Soit $\{p, q\}$ la classe à deux éléments d'une congruence atomique de domaine X. On a $p \parallel q$. De $x < p \, \theta \, q$, on déduit $x < q$, pour tout $x \in X$, de sorte que $(p[\subset (q[$. De même, on démontre que $(q[\subset (p[$, d'où la conclusion.

γ) Les identités sur les complémentaires des singlets sont les seules congruences atomiques dont le domaine diffère de X. En effet, soit θ_Y un atome de Con(X)($Y \neq X$). Comme $\omega < \omega_Y \leqslant \theta_Y$, on a $\theta_Y = \omega_Y$. De plus, si $-Y$ contient deux éléments a et b, il vient $\omega < \omega_{X-\{a\}} < \omega_Y$, d'où la conclusion.

2.2. Théorème. *Les atomes duaux de* Con(X) *sont les équivalences universelles sur les antichaînes de* X.

Démonstration. α) Si une partie non vide Y de X est une antichaîne, la congruence ι_Y est dualement atomique, sinon il existerait une congruence φ_Z telle que $\iota_Y < \varphi_Z < \varnothing$. De $\iota_Y < \varphi_Z$, on déduit que la partie non vide Z de Y est ι_Y-saturée et donc $Z = Y$, ce qui interdit l'inégalité stricte $\iota_Y < \varphi_Z$.

β) Pour démontrer qu'une congruence dualement atomique est l'équivalence universelle sur une antichaîne, il suffit de remarquer que toute congruence $\varphi_Z(Z \neq \varnothing)$ est inférieure ou égale à ι_C où C désigne n'importe quelle φ_Z-classe.

2.3. Remarque. La preuve du théorème 2.2 (point β) montre en outre que Con(X) est dualement atomique. Plus généralement, on a le théorème suivant.

2.4. Théorème. Con(X) *est dualement atomistique.*

Démonstration. Comme toute congruence θ_Y est inférieure ou égale aux congruences dualement atomiques que sont les équivalences universelles sur chacune de ses classes, il suffit de prouver qu'elle en est leur infimum.

Soit $\{C_i \mid i \in I\}$ l'ensemble des θ_Y-classes. Considérons une congruence φ_T telle que $\varphi_T \leqslant \iota_{C_i}$, pour tout $i \in I$ et démontrons que $\varphi_T \leqslant \theta_Y$. D'une part, on a $Y = \cup \{C_i \mid i \in I\} \subset T$. De plus, si $x \in T - Y$, on a $x \in T - C_i$, pour tout $i \in I$ et donc $x^{\varphi T} \cap Y = \varnothing$. Enfin, si x et y sont des éléments de Y tels que $x \varphi_T y$, il existe $i \in I$ tel que $\{x, y\} \subset C_i$ (car toute classe C_i est φ_T-saturée) et donc $x \, \theta_Y y$, d'où la conclusion.

2.5. Théorème. Con(X) *est semi-modulaire, c'est-à-dire pour tout* $\theta_Y \in$ Con(X), *pour tout* $\varphi_Z \in$ Con(X),

$$\theta_Y \wedge \varphi_Z \prec \theta_Y \Rightarrow \theta_Y \vee \varphi_Z \succ \varphi_Z.$$

Démonstration. Si on tient compte du théorème 1.6, il suffit de démontrer la propriété voulue en supposant $\theta_Y \wedge \varphi_Z = \omega$ et θ_Y atome.

Si $Y = X$, il existe $p \in X, q \in X$ tels que $(p[= (q[$ et $\theta_Y = \theta_{(p,q)}$. Dès lors, quelle que soit la congruence φ_Z, on a

$$(\theta_{(p,q)} \vee \varphi_Z = \theta_{(p,q)} \mid z \vee_{\mathrm{eq}(Z)} \varphi_Z) \quad \text{ou}$$
$$(\theta_{(p,q)} \vee \varphi_Z = \varphi_Z|_{Z-(p,q)})$$

suivant que Z contient $\{p, q\}$ ou non. Dans chacun des cas, la conclusion est évidente.

Si $\theta_Y = \omega_{X-\{a\}} (a \in X)$ et $\omega_{X-\{a\}} \wedge \varphi_Z = \omega$, on a $\omega_{X-\{a\}} \not\leqslant \varphi_Z$ et donc $a \in Z$. Dès lors, $\omega_{X-\{a\}} \vee \varphi_Z = \varphi_Z|_{Z-a}\varphi_Z \succ \varphi_Z$.

2.6. Définition. Rappelons qu'un lattis L admettant un maximum 1 est dit *à sections finissantes complémentées* ([2], p. 85) lorsque, pour tout $a \in$ L, le sous-lattis L_a défini par

$$L_a = \{x \in L \mid a \leqslant x \leqslant 1\}$$

est complémenté.

2.7. Théorème. Con(X) *admet des sections finissantes complémentées.*

Démonstration. En vertu du théorème 1.6, il suffit de prouver que Con(X) est complémenté.

Soit θ_Y une congruence sur X de domaine Y et $\{C_\alpha \mid \alpha \in I\}$ l'ensemble des θ_Y-classes. Après avoir choisi dans chaque θ_Y-classe C_α un élément a_α, considérons l'ensemble

$$Z = -Y \cup \cup \{C_\alpha - \{a_\alpha\} \mid \alpha \in I\}$$

et démontrons que ω_Z est un complément de θ_Y.

D'une part, il est évident que $\omega_Z \vee \theta_Y = \varnothing$. En effet, le domaine de définition de $\omega_Z \vee \theta_Y$ est une partie de $Y \cap Z = \cup \{C_\alpha - \{a_\alpha\} \mid \alpha \in I\}$ qui ne peut être union de θ_Y-classes que lorsqu'elle est vide.

D'autre part, l'infimum de ω_Z et θ_Y est défini sur $Y \cup Z = X$. Pour démontrer que c'est l'identité, considérons une congruence φ_T inférieure ou égale à θ_Y et à ω_Z et démontrons qu'elle vaut ω. De $\varphi_T \leqslant \theta_Y$ (resp. $\varphi_T \leqslant \omega_Z$) on déduit que Y (resp. Z) est φ_T-saturé et que $T = X$.

Si $x\varphi_T y$, considérons les différents cas possibles.

(i) Si $x \in Z$, alors $y \in Z$ et $x\varphi_T|_Z y$ c'est-à-dire $x\omega_Z y$ ou $x = y$.

(ii) Si $x \in -Z$, on a $y \in -Z$ et $\{x, y\} \subset \{a_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset Y$. De $x\varphi_T|_Y y$, on déduit $x\theta_Y y$ et donc $x = y$, d'où la conclusion.

3. Caractérisation d'ensembles ordonnés dont le lattis des congruences admet des propriétés particulières

3. Définition. Un lattis L est *relativement complémenté* lorsque, pour tout $a \in$ L, pour tout $b \in$ L ($a \leqslant b$), le sous-lattis $[a, b]$ défini par

$$[a, b] = \{x \in L \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$
est complémenté.

3.2. Théorème. *Soit X un ensemble ordonné. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Pour tout* $x \in X$, *pour tout* $y \in X$: $x \mid\mid y$ implique $(x[= (y[$.

(ii) Con(X) *est atomistique.*

(iii) Con(X) *est relativement complémenté.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). D'une part, on montre facilement que, sous la condition (i), Con(X) est atomique. En effet, si θ est une congruence de domaine X et si x et y sont des éléments distincts de X tels que $x \theta y$, on a $x \mid\mid y$ et donc $(x[= (y[$. Dès lors, $\theta_{(x,y)}$ est une congruence atomique inférieure ou égale à θ.

Si θ_Y est une congruence de domaine Y différent de X et si $a \in - Y$, il vient $\omega_{X-\{a\}} \leqslant \theta_Y$, d'où la conclusion.

Pour démontrer que, sous cette condition, Con(X) est atomistique, considérons une congruence θ_Y. Les atomes inférieurs à θ_Y s'écrivent

a) $\theta_{(p,q)}$ avec $(p[= (q[, \{p, q\} \subset - Y$ ou $(\{p, q\} \subset Y$ et $p\theta_Y q)$,

b) $\omega_{X-\{a\}}$ avec $a \in - Y$.

Afin de démontrer que le supremum de ces congruences atomiques vaut θ_Y, considérons une congruence φ_T supérieure à chacune d'elles et démontrons que $\varphi_T \geqslant \theta_Y$.

De $\varphi_T \geqslant \omega_{X-(a)}$, pour tout $a \in - Y$, on déduit que $T \subset Y$. Lorsque $x \in Y - T$, on a $x^{\theta_Y} \cap T = \varnothing$, sinon il existe $y \in T \cap Y$ tel que $x \; \theta_Y \; y$. Or, $\theta_{(y,x)}$ est une congruence atomique inférieure à θ_Y de sorte que T ne peut contenir y sans contenir x.

Enfin, si $x \in T$, $y \in T$ et $x\theta_Y y$, il vient $x\theta_{(x,y)} \mid {}_T y$ et donc $x\varphi_T y$ d'où la conclusion.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons Con(X) atomistique. Si la condition (i) n'est pas vérifiée, il existe $x \in X$, $y \in X$ tels que $x \mid\mid y$ et $\theta_{(x,y)} \notin$ Con(X). De plus, les atomes inférieurs à la congruence $\iota_{\{x,y\}}$ sont les identités sur les complémentaires des singlets $\{a\}$, pour tout $a \in - \{x, y\}$, et les équivalences de domaine X engendrées par les paires $\{p, q\}$ telles que $(p[= (q[$ et $\{x, y\} \cap \{p, q\} = \varnothing$. Or, leur supremum

$$\vee \{\omega_{X-\{t\}} \mid t \in - \{x, y\}\} \vee \vee \{\theta_{(p,q)} \mid (p[= (q[, \{x, y\} \cap \{p, q\} = \varnothing\}$$

vaut

$$\omega_{\{x,y\}} \vee \vee \{\theta_{(p,q)} \mid (p[= (q[, \{x, y\} \cap \{p, q\} = \varnothing\},$$

c'est-à-dire $\omega_{\{x,y\}}$ et non $\iota_{\{x,y\}}$, ce qui contredit l'atomisticité de Con(X).

(i) $\Rightarrow$ (iii). Soit $\theta_Y \in$ Con(X). On remarque aisément que, lorsque X satisfait à la condition (i), il en est de même pour l'ensemble quotient Y/θ_Y. Dès lors, en vertu du théorème 1.6, il suffit de prouver que, sous la condition (i), si α_T et φ_Z sont des éléments de Con(X) tels que $\omega \leqslant \alpha_T \leqslant \varphi_Z$, il existe une congruence β_U telle que $\alpha_T \wedge \beta_U = \omega$ et $\alpha_T \vee \beta_U = \varphi_Z$.

Après avoir choisi dans chaque α_T-classe x^{α_T}, un élément $(x^{\alpha_T})_*$, appelons V la partie de T définie par

$$V = \cup \{x^{\alpha_T} - \{(x^{\alpha_T})_*\} \mid x \in T - Z\}.$$

Soit β_U la congruence de domaine $U = -T \cup Z \cup V$ définie par

$$\beta_U = \omega_{-T} \wedge \vee \{\theta_{((x^{\alpha_T})_*,(y^{\alpha_T})_*)} \mid_Z \mid x \in Z, y \in Z \text{ et } x\varphi_Z y\} \wedge \omega_V.$$

Comme on a $(x^{\alpha_T})_* \varphi_Z (y^{\alpha_T})_*$, il est évident, en vertu de la condition (i) que $\theta_{((x^{\alpha_T})_*,(y^{\alpha_T})_*)} \mid_Z$ est une congruence. De plus, comme

$$\vee_{eq(Z)} \{\theta_{((x^{\alpha_T})_*,(y^{\alpha_T})_*)} \mid_Z \mid x \in Z, y \in Z \text{ et } x\varphi_Z y\} \subset \varphi_Z,$$

cette équivalence admet des classes convexes qui sont des antichaînes et représente ainsi le supremum dans Con(X) des congruences $\theta_{((x^{\alpha_T})_*,(y^{\alpha_T})_*)}|_Z$ considérées.

Pour montrer que β_U est un complément de α_T dans $\{\theta_A \in \mathrm{Con}(X) \mid \theta_A \leqslant \varphi_Z\}$ il reste à prouver les deux égalités $\alpha_T \vee \beta_U = \varphi_Z$ et $\alpha_T \wedge \beta_U = \omega$.

α) Il est évident que $\beta_U \leqslant \varphi_Z$ car $Z \subset U$ et Z est β_U-saturé. De plus,

$$\beta_U|_Z = \vee_{eq(Z)} \{\theta_{((x^{\alpha_T})_*,(y^{\alpha_T})_*)} \mid_Z \mid x\varphi_Z y\} \subset \varphi_Z.$$

Si une congruence θ_A est supérieure ou égale à α_T et à β_U, on déduit que $A \subset T \cap U = Z \cup V$. Or, s'il existe y dans $A - Z$, alors $y \in V$ et $(y^{\alpha_T})_* \in -V \cap -Z \subset -A$, ce qui empêche A d'être α_T-saturé et interdit l'inégalité $\alpha_T \leqslant \theta_A$. Ainsi $A \subset Z$.

Soit $x \in Z - A$. Pour montrer que $x\varphi_Z y$ implique $y \in -A$, deux cas sont à considérer.

(i) Lorsque $x\alpha_T y$, on a $y \in -A$ puisque $\alpha_T \leqslant \theta_A$.

(ii) Sinon,

$$x\alpha_T (x^{\alpha_T})_* \theta_{((x^{\alpha_T})_*,(y^{\alpha_T})_*)} (y^{\alpha_T})_* \alpha_T y$$

et donc,

$$x\alpha_T (x^{\alpha_T})_* \beta_U (y^{\alpha_T})_* \alpha_T y,$$

ce qui impose successivement

$$(x^{\alpha_T})_* \in -A, (y^{\alpha_T})_* \in -A, y \in -A.$$

Enfin, pour démontrer l'inclusion $\varphi_Z|_A \subset \theta_A$, considérons un élément (x, y) de $\varphi_Z|_A$. Si $x\alpha_T y$, on déduit $x\theta_A y$ de l'inégalité $\alpha_T \leqslant \theta_A$. Sinon il vient

$$x\alpha_T (x^{\alpha_T})_* \theta_{((x^{\alpha_T})_*,(y^{\alpha_T})_*)} (y^{\alpha_T})_* \alpha_T y$$

ou encore $x\alpha_T (x^{\alpha_T})_* \beta_U (y^{\alpha_T})_* \alpha_T y$, de sorte que $x\theta_A (x^{\alpha_T})_* \theta_A (y^{\alpha_T})_* \theta_A y$ et donc $x\theta_A y$

β) Pour prouver que $\alpha_T \wedge \beta_U = \omega$, il suffit de montrer que toute congruence inférieure ou égale à la fois à α_T et β_U est nécessairement l'identité sur X. Soit θ_A, une telle congruence. De $\theta_A \leqslant \alpha_T$ et $\theta_A \leqslant \beta_U$, on déduit que $A = T \cup U = X$. De plus, si $(x, y) \in \theta_A$, plusieurs cas sont à considérer.

a) Lorsque $x \in -T \subset U$ et donc $y \in -T$, on a $x\beta_U \mid_{-T} y$ et donc $x\omega_{-T} y$, c'est-à-dire $x = y$.

b) Si $x \in T$ et donc $y \in T$, on a $x\alpha_T y$. Lorsque $x \in Z$ et donc $y \in Z$ (car $\theta_A \leqslant \varphi_Z$), il vient $x\beta_U|_Z y$, ce qui est impossible si $x \neq y$, vu la définition de β_U sur Z. Lorsque $x \in -Z \cap T$, on a $y \in -Z \cap T$. Si $(x^{\alpha_T})_* = (y^{\alpha_T})_*$ diffère de x et de y, alors $x\beta_U|_V y$ et donc $x = y$. Le cas où $(x^{\alpha_T})_* = x$ et $(x^{\alpha_T})_* \neq y$ est à rejeter car il impose $x \notin U$ et $y \in U$ et empêche U d'être θ_A-saturé.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Si la condition (i) n'est pas vérifiée, il existe $x \in X, y \in X, z \in X$ tels que $x \parallel y, z < x$ et $z \nless y$. Si θ_Y est un complément de $\omega_{\{x,y\}}$ dans

$\{\varphi_Z \in \mathrm{Con}(X) \mid \omega_{\{x,y,z\}} \leqslant \varphi_Z \leqslant \iota_{\{x,y\}}\}$, on vérifie facilement que $Y = \{x, y, z\}$ et $\theta_Y \mid_{\{x,y\}} = \iota_{\{x,y\}}$, ce qui est impossible.

Pour étudier la modularité de Con(X), nous avons besoin des deux lemmes suivants.

3.3 LEMME. *Soit* X *un ensemble ordonné. Si* Con (X) *est modulaire, alors* X *satisfait à la condition*

$(_*)$ $a \,||\, b$ *et* $a \,||\, c \Rightarrow b = c$, *pour tout* $a \in X$, *pour tout* $b \in X$, *pour tout* $c \in X$.

Démonstration. Soit Con(X) modulaire. Pour prouver que la condition $(_*)$ est nécessaire, supposons qu'il existe $a \in X$, $b \in X$, $c \in X$ tels que $a \,||\, b$, $a \,||\, c$ et $b \neq c$. Considérons les congruences $\iota_{\{a,b\}}$, $\iota_{\{a,c\}}$, $\omega_{\}a,b\}}$, $\omega_{\{a,b,c\}}$. Comme $\omega_{\{a,b\}} \leqslant \iota_{\{a,b\}}$, il vient

$$\omega_{\{a,b\}} \vee (\iota_{\{a,c\}} \wedge \iota_{\{a,b\}}) = (\omega_{\{a,b\}} \vee \iota_{\{a,c\}}) \wedge \iota_{\{a,b\}}$$

et donc $\omega_{\{a,b\}} \vee \omega_{\{a,b,c\}} = \varnothing \wedge \iota_{\{a,b\}}$ ou encore $\omega_{\{a,b\}} = \iota_{\{a,b\}}$ ce qui est impossible.

3.4. LEMME. *Soit* X *un ensemble ordonné satisfaisant à la condition* $(_*)$ *du lemme* 3.3. *Alors*

(i) *le supremum dans* Con(X) *de deux congruences* α_T *et* β_Y *admet comme domaine*

$$U = T \cap Y - \{x \in T \cap Y \mid x^{\alpha_T} \not\subset T \cap Y \text{ ou } x^{\beta_Y} \not\subset T \cap Y\}$$

et se définit de la manière suivante, pour tout $x \in U$, *pour tout* $y \in U$.

$$x(\alpha_T \vee \beta_Y)y \text{ si et seulement si } x\alpha_T y \text{ ou } x\beta_Y y.$$

(ii) *l'infimum dans* Con(X) *de deux congruences* α_T *et* β_Y *a pour domaine* $T \cup Y$ *et se définit comme suit* : $x(\alpha_T \wedge \beta_Y)y$ *si et seulement si*

$x\alpha_T y$ *et* $\{x, y\} \subset T - Y$

ou $x\beta_Y y$ *et* $\{x, y\} \subset Y - T$

ou $x\alpha_T y$ *et* $x\beta_Y y$ *et* $\{x, y\} \subset Y \cap T$.

Démonstration, Pour démontrer la proposition (i), considérons deux congruences α_T et β_Y. Compte tenu de $(_*)$, toute classe de congruence admet au plus deux éléments et si $x\alpha_T y$ et $x\beta_Y z$ avec $x \neq y$ et $x \neq z$, alors $y = z$.

L'ensemble U décrit dans l'énoncé est union de α_T-classes (et donc de β_Y-classes). En effet, supposons qu'il existe $x \in U$, $y \in X$ tels que $x\,\alpha_T y$. Comme $x^{\alpha_T} \cup x^{\beta_Y} \subset T \cap Y$, il vient $y \in T \cap Y$ et $y^{\alpha_T} \subset T \cap Y$. De plus, comme $y^{\beta_Y} \subset \{x, y\}$, on a $y^{\beta_Y} \subset T \cap Y$, d'où la conclusion.

Dans U, toute classe de l'équivalence $\alpha_T|_U \vee_{\mathrm{eq}(U)} \beta_Y|_U$ est une α_T-classe ou une β_Y-classe et donc une antichaîne.

Enfin, il est clair que U est la plus grande partie de $T \cap Y$ qui soit α_T-saturée et β_Y-saturée et est donc le domaine de $\alpha_T \vee \beta_Y$.

Sur U, la description de $\alpha_T \vee \beta_Y$ est évidente, vu $(_*)$.

Pour démontrer la proposition (ii), il convient de prouver que la relation d'équivalence R de domaine $T \cup Y$ et définie dans l'énoncé est une congruence. Si nous supposons $x < y\mathrm{R}t$, il vient $x < t$. En effet, il faut rejeter le cas où $t < x < y$ sinon il existerait une α_T-classe ou une β_Y-classe qui ne soit pas une antichaîne. De plus, si x et t étaient incomparables, il viendrait $x = y$, vu la condition $(_*)$. Il est évident que toute R-classe est incluse dans une α_T-classe ou une β_Y-classe et reste donc une antichaîne, d'où la conclusion.

Pour prouver que R, inférieur ou égal à α_T et à β_Y, en est leur infimum, il convient de considérer une congruence φ_Z inférieure ou égale à α_T et à β_Y et de démontrer qu'elle est inférieure ou égale à R.

Il est clair que $T \cup Y \subset Z$ et que $x^{\varphi_Z} \cap (T \cup Y) = \varnothing$, pour tout $x \in Z - (T \cup Y)$. Soient $x \in T \cup Y$, $y \in T \cup Y$ $(x \neq y)$ tels que $x\varphi_Z y$. Comme T (resp. Y) est union de φ_Z-classes, on a $\{x, y\} \subset T \cap -Y$ ou $\{x, y\} \subset Y - T$ ou $\{x, y\} \subset T \cap Y$. Dans chacun des cas, on vérifie sans peine que xRy.

Le théorème suivant donne alors une caractérisation des ensembles ordonnés dont le lattis des congruences est modulaire ou dualement semi-modulaire.

3.5. THÉORÈME. *Si* X *est un ensemble ordonné, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) X *satisfait à la condition* $(_*)$ *du lemme* 3.3.

(ii) Con(X) *est modulaire.*

(iii) Con(X) *est dualement semi-modulaire.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Considérons des congruences $\theta_Y, \alpha_T, \varphi_Z$. Supposons que $\theta_Y \leqslant \varphi_Z$ (d'où $Z \subset Y$) et démontrons l'inégalité

$$(\theta_Y \vee \alpha_T) \wedge \varphi_Z \leqslant \theta_Y \vee (\alpha_T \wedge \varphi_Z).$$

En vertu du lemme 3.4, le domaine U de $\theta_Y \vee \alpha_T$ est donné par

$$U = T \cap Y - \{x \in T \cap Y \mid x^{\theta_Y} \not\subset T \text{ ou } x^{\alpha_T} \not\subset Y\},$$

tandis que les domaines respectifs A et B du premier et du second membre de l'inégalité sont donnés par

$$A = Z \cup U,$$
$$B = Y \cap (T \cup Z) - \{x \in Y \cap (T \cup Z) \mid x^{\theta_Y} \not\subset T \cup Z \text{ ou } x^{\alpha_T \wedge \varphi_Z} \not\subset Y\}.$$

L'inclusion $A \subset B$ est évidente. Pour démontrer l'inclusion inverse, considérons un élément x de $B - Z$. On a $x \in Y \cap T$. Si $x^{\theta_Y} \not\subset T$, il vient $x^{\theta_Y} \not\subset T \cup Z$ (car $-Z$ est θ_Y-saturé) et donc $x \in -B$, ce qui est impossible. Si $x^{\alpha_T} \not\subset Y$, il existe $y \in -Y \subset -Z$ tel que $x\alpha_T y$ et donc $x(\alpha_T \wedge \varphi_Z)y$, de sorte que $x^{\alpha_T \wedge \varphi_Z} \not\subset Y$, ce qui contredit l'appartenance de x à l'ensemble B. Ainsi, on a $x \in U$, d'où $B \subset A$.

Pour conclure, il reste à prouver l'inclusion

$$(\theta_Y \vee \alpha_T) \wedge \varphi_Z \subset \theta_Y \vee (\alpha_T \wedge \varphi_Z).$$

Supposons $(x, y) \in (\theta_Y \vee \alpha_T) \wedge \varphi_Z (x \in A, y \in A)$ et considérons les cas suivants.

a) Si $x \in Z - U$, vu la description de l'infimum de deux éléments de Con(X) (lemme 3.4), on peut supposer $y \in Z - U$ et $x\varphi_Z y$.

(i) Lorsque $x \in Z - T$ et $y \in Z - T$, il vient $x(\varphi_Z \wedge \alpha_T)y$ et donc $(x, y) \in \theta_Y \vee (\alpha_T \wedge \varphi_Z)$.

(ii) Soit $x \in Z - T \subset Z - U$. Dès que $y \in Z \cap T \cap -U$, il vient $y^{\theta_Y} \not\subset T$ ou $y^{\alpha_T} \not\subset Y$. Vu la condition $(_*)$, on a $y^{\theta_Y} \cup y^{\alpha_T} \subset \{x, y\}$. Puisque $x \in -T$, il vient $y^{\alpha_T} = \{y\}$, de sorte que $y^{\theta_Y} \not\subset T$ et $x\theta_Y y$ ou encore $x(\theta_Y \vee (\alpha_T \wedge \varphi_Z))y$.

(iii) Lorsque $x \in Z \cap T \cap -U$ et $y \in Z - T$, on conclut comme en (ii). De plus, on ne peut considérer le cas où $y \in Z \cap T \cap -U$ car $y^{\alpha_T} \cup y^{\theta_Y} \subset \{x,y\} \subset T \cap Y$.

b) Si $x \in Z \cap U, y \in Z \cap U, x\varphi_Z y$ et $x(\theta_Y \vee \alpha_T)y$, il vient $x\theta_Y y$ ou ($x\varphi_Z y$ et $x\alpha_T y$), de sorte que $(x, y) \in \theta_Y \vee (\varphi_Z \wedge \alpha_T)$.

c) Enfin, si $x \in U - Z$ et $y \in U - Z$, on a $x\theta_Y y$ ou $x\alpha_T y$ c'est-à-dire $x\theta_Y y$ ou $x(\alpha_T \wedge \varphi_Z)$, ce qui signifie que $(x, y) \in \theta_Y \vee (\varphi_Z \wedge \alpha_T)$.

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est triviale tandis que (iii) $\Rightarrow$ (i) se démontre par l'absurde. Si X ne satisfait pas à la condition $(_*)$, il existe $a \in X$, $b \in X$, $c \in X$ tels que $a \parallel b$, $a \parallel c$, $b \neq c$. Or,

$$\iota_{\{a,b\}} \prec \iota_{\{a,c\}} \vee \iota_{\{a,b\}} = \varnothing,$$

tandis que

$$\iota_{\{a,c\}} \wedge \iota_{\{a,b\}} = \omega_{\{a,b,c\}} < \omega_{\{a,c\}} < \iota_{\{a,c\}},$$

ce qui interdit à Con(X) d'être dualement semi-modulaire.

3.6. Théorème. *Soit* X *un ensemble ordonné. Alors les quatre propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) X *est une chaîne.*

(ii) Con(X) *est un lattis de Boole.*

(iii) Con(X) *est distributif.*

(iv) Con(X) *est unicomplémenté.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Si X est une chaîne, les seules congruences de X sont les identités sur les parties de X (car toute classe de congruence est une antichaîne), de sorte que Con(X) est isomorphe au lattis de Boole des parties de X.

Il est évident que (ii) implique (i). L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) se démontre par l'absurde. S'il existe deux éléments a et b incomparables, considérons les congruences $\omega_{\{a\}}, \omega_{\{b\}}, \iota_{\{a,b\}}$. On a

$$(\omega_{\{a\}} \wedge \omega_{\{b\}}) \vee \iota_{\{a,b\}} = \omega_{\{a,b\}} \vee \iota_{\{a,b\}} = \iota_{\{a,b\}},$$

tandis que

$$(\omega_{\{a\}} \vee \iota_{\{a,b\}}) \wedge (\omega_{\{b\}} \vee \iota_{\{a,b\}}) = \varnothing,$$

ce qui contredit la distributivité de Con(X).

Enfin, pour démontrer l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i), supposons que Con(X) est unicomplémenté et utilisons les notations du théorème 2.7. On en déduit que, pour toute congruence θ_Y de X, toute θ_Y-classe C_α se réduit à un singlet. S'il existait deux éléments incomparables, la congruence universelle sur l'antichaîne formée par ces éléments contredirait ce résultat, d'où la conclusion.

4. DEMI-LATTIS DE BROUWER FINIS

Dans [3], Köhler établit l'existence d'une correspondance biunivoque entre la classe des demi-lattis de Brouwer finis et celle des ensembles ordonnés finis. Cette correspondance associe à chaque demi-lattis de Brouwer fini A l'ensemble de ses éléments $\wedge$-irréductibles M(A), avec l'ordre induit. Inversement, l'ensemble des filtres d'ordre d'un ensemble ordonné X, ordonné selon l'inclusion inverse, constitue un demi-lattis de Brouwer $\mathcal{O}(X)$ où l'infimum s'identifie à l'union et tel que, pour tout $E \in \mathcal{O}(X)$, pour tout $F \in \mathcal{O}(X)$, $E * F = [F - E)$.

Désignons par **BS**, la catégorie des demi-lattis de Brouwer finis et leurs homomorphismes et par **P** celle des ensembles ordonnés finis et des morphismes définis au début de ce travail. Köhler introduit un foncteur contravariant $\mathcal{O} : \mathbf{P} \to \mathbf{BS}$ qui, au niveau des objets s'identifie à la correspondance signalée plus haut. De plus, si X_1 et X_2 sont des ensembles ordonnés finis, à tout morphisme $\alpha : X_1 \to X_2$, il associe l'homomorphisme $\mathcal{O}(\alpha) : \mathcal{O}(X_2) \to \mathcal{O}(X_1)$ défini par

$$\mathcal{O}(\alpha)(E) = [\alpha^{-1}(E)),$$

pour tout $E \in \mathcal{O}(X_2)$.

Ce foncteur $\mathcal{O}$ établit une dualité entre **BS** et **P** et à tout morphisme injectif (resp. surjectif) associe un homomorphisme de demi-lattis de Brouwer qui est surjectif (resp. injectif). Or, dans l'ensemble des sous-algèbres d'une algèbre donnée, l'inclusion s'exprime par des homomorphismes injectifs tandis que dans l'ensemble des congruences d'un ensemble ordonné fini, elle s'exprime par des morphismes surjectifs (théorème 1.1), de sorte que la dualité de Köhler permet d'établir l'existence d'un antiisomorphisme entre le lattis des sous-algèbres d'un demi-lattis de Brouwer fini A et le lattis des congruences définies sur l'ensemble ordonné de ses éléments $\wedge$-irréductibles M(A).

En utilisant cette correspondance, il est alors possible de traduire des résultats relatifs aux congruences d'un ensemble ordonné fini (2.4, 2.5, 2.7, 3.2, 3.5, 3.6) en propriétés du lattis des sous-algèbres d'un demi-lattis de Brouwer fini.

4.1. Théorème. *Le lattis des sous-algèbres d'un demi-lattis de Brouwer fini est atomistique.*

4.2. Théorème. *Le lattis des sous-algèbres d'un demi-lattis de Brouwer fini est dualement semi-modulaire.*

4.3. Théorème. *Le lattis des sous-algèbres d'un demi-lattis de Brouwer fini admet des sections commençantes complémentées.*

4.4. Théorème. *Soit* A *un demi-lattis de Brouwer fini. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) A *est une somme ordinale d'algèbres de Boole.*

(ii) *Le lattis des sous-algèbres de* A *est dualement atomistique.*

(iii) *Le lattis des sous-algèbres de* A *est relativement complémenté.*

Démonstration. Il suffit de traduire les résultats du théorème 3.2 en propriétés du lattis des sous-algèbres d'un demi-lattis de Brouwer fini, à condition de montrer que, si X est un ensemble ordonné fini tel que, pour tout $p \in X$, pour tout $q \in X$, $p \parallel q \Rightarrow (p[= (q[$, alors l'ensemble ordonné par inclusion (resp. inclusion inverse) de ses idéaux d'ordre (resp. filtres d'ordre) est une somme ordinale d'algèbres de Boole. Or, l'ensemble ordonné des idéaux d'ordre de Min X détermine l'algèbre de Boole $\mathit{2}^k$ où k désigne le nombre d'éléments minimaux de X. De plus, les éléments minimaux de X — Min X sont, en vertu de la condition imposée à X, tous supérieurs à tous les éléments de Min X. Ainsi, l'ensemble ordonné des idéaux d'ordre de Min X $\cup$ Min(X — Min X) est isomorphe à $\mathit{2}^k \oplus \mathit{2}^r$ où r désigne le nombre d'éléments de Min(X — Min X). En itérant le processus, on conclut.

4.5. Théorème. *Soit* A *un demi-lattis de Brouwer fini. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) A *est une somme ordinale d'algèbres de Boole à* 1 *ou à* 4 *éléments.*

(ii) *Le lattis des sous-algèbres de* A *est modulaire.*

(iii) *Le lattis des sous-algèbres de* A *est semi-modulaire.*

Démonstration. Soit X un ensemble ordonné fini tel que, pour tout $a \in X$, pour tout $b \in X$, pour tout $c \in X$, on ait

$$(*) \qquad a \parallel b \text{ et } a \parallel c \Rightarrow b = c.$$

En particulier, il satisfait à la condition

$$a \parallel b \Rightarrow (a[= (b[,$$

pour tout $a \in X$, pour tout $b \in X$, de sorte que l'ensemble des idéaux d'ordre de X est une somme ordinale d'algèbres de Boole. Si une de ces algèbres de Boole contenait trois atomes et donc trois atomes duaux, l'ensemble des éléments $\wedge$-irréductibles de $\mathcal{O}(X)$ avec l'ordre induit contiendrait trois éléments distincts incomparables.

Ainsi, l'ensemble des idéaux d'ordre d'un ensemble qui satisfait à la condition $(*)$ est une somme ordinale d'algèbres de Boole à 1 (à 2) ou à 4 éléments. Pour conclure, il suffit d'utiliser le théorème 3.5.

4.6. THÉORÈME. *Soit* A *un demi-lattis de Brouwer fini. Alors les quatre propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) A *est une chaîne.*

(ii) *Le lattis des sous-algèbres de* A *est booléen.*

(iii) *Le lattis des sous-algèbres de* A *est distributif.*

(iv) *Le lattis des sous-algèbres de* A *est unicomplémenté.*

Démonstration. Il suffit de traduire les résultats du théorème 3.6.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRKHOFF, G., Lattice theory, third edition, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, vol. 25, Providence (1967).

[2] GRÄTZER, G., General lattice theory, *Mathematische Reihe*, vol. 52, Birkäuser Basel (1978).

[3] KÖHLER, P., Brouwerian Semilattices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **268-1** (1981), 103-126.