Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 51e année, nº 1-2, 1982, pp. 95-100

L'ESPACE DES MESURES $M_\Phi(T)$

par W. HABRE

INTRODUCTION

La recherche d'un espace de mesure $M_x(T)$, intermédiaire entre $M_\tau(T)$ et $M_\sigma(T)$, permettant de séparer dans l'égalité $M_\sigma(T) = M_\tau(T)$, la condition de cardinalité et de celle portant sur la topologie de T, a été envisagée par Fremlin, Garling, Haydon, Sentilles, Wheeler (cf. [5], [6], [9], [10]). Sachant que le problème est toujours ouvert mais délimité par les exemples de Haydon dans [5], on associe à chaque partition continue de l'unité $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I}$ l'espace localement compact $\theta_\varphi T = \bigcup_{i\in I} \{u \in \beta T;\ \overline{\varphi}_i^\beta(u) > 0\}$ et on propose l'espace des mesures $M_\Phi(T) = \bigcap_{\varphi\in\Phi} M_t(\theta_\varphi T)$.

Ce nouvel espace $M_\Phi(T)$, associé d'une façon canonique à toutes les (p.c.u.) Φ, possède les bonnes propriétés de $M_\sigma(T)$ et $M_\tau(T)$. On démontre en particulier que $M_\Phi(T) = M_\sigma(T)$ a lieu si et seulement si $\theta T = \upsilon T$ et que $M_\Phi(T) = M_\tau(T)$ a lieu si, pour tout compact $K \subseteq \beta T - T$, il existe $\varphi \in \Phi$ tel que $\theta_\varphi T \cap K = \varnothing$.

PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS

L'espace topologique T est toujours supposé complètement régulier séparé. $C^\infty(T)$ désigne l'algèbre des fonctions continues et bornées sur T à valeurs réelles. Si l'espace T est localement compact, $C_0(T)$ désigne la sous-algèbre de $C^\infty(T)$ formée des fonctions qui s'annulent à l'infini. On note, βT le compactifié de Stone-Čech de T, υT le repleté de Hewitt de T et θT le *c*-repleté (complété de T pour la structure uniforme universelle).

§ 1. *Partition de l'unité*

Une famille $\Phi = (\varphi_i)_{i\in I}$ de fonctions continues sur T est une partition continue de l'unité, en abrégé (p.c.u.), si elle vérifie les conditions suivantes :

1º $\varphi_i \geqslant 0,\ \forall\, i \in I$,

2º la famille $(S(\varphi_i))_{i\in I}$ est localement finie,

3º $\sum_{i\in I} \varphi_i = 1$.

On désigne par Φ l'ensemble des partitions continues de l'unité sur T, Φ est évidemment non vide. A tout $\varphi \in \Phi$, $\varphi = (\Phi_i)_{i\in I}$, on associe la famille des ouverts

Présenté par J. Schmets le 19 novembre 1981.

$\rho_\varphi = (T_i^\beta)$, où $T_i^\beta = \{u \in \beta T, \varphi_i^\beta(u) > 0\}$, φ_i^β étant le prolongement de φ_i à βT, pour tout $i \in I$.

Soit $\varphi \in \Phi$ une p.c.u. sur T. Désignons par $\theta_\varphi(T) = \bigcup_{i \in I} T_i^\beta$.

Il est clair que $\theta_\varphi T$ est un ouvert de βT, donc localement compact et il contient T. On a de plus d'après le théorème de Tamano [1].

LEMME 1.1. [11].

θT est l'intersection des espaces localement compacts $\theta_\varphi T$, lorsque φ parcourt l'ensemble Φ des (p.c.u.) sur T.

Preuve. Montrons tout d'abord qu'on a $\theta T \subseteq \theta_\varphi T$ pour toute (p.c.u.) $\varphi = (\varphi_i)_{i \in I'}$, sur T. En effet, soit $u \in \theta T$, comme la famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ est équicontinue, il existe d'après ([1], 6.2.5) un élément $t \in T$ tel que $u(\varphi_i) = \varphi_i(t), \forall\, i \in I$. Or $(\varphi_i)_{i \in I}$ étant (p.c.u.), alors $t \in T_{i_0}$ pour au moins un indice $i_0 \in I$. D'où $\varphi_{i_0}(u) = u(\varphi_{i_0}) = \varphi_{i_0}(t) > 0$ et $u \in T_{i_0}^\beta$. Pour terminer, soit $u \in \beta T - \theta T$, il existe d'après le théorème de Tamano ([1], 6.4.5) une (p.c.u.), $\varphi = (\varphi_i)_{i \in I}$ sur T telle que, $u(\varphi_i) = 0, \forall\, i \in I$. Par suite $u \notin \theta_\varphi T$.

QUESTION 1.2. L'espace $\theta_\varphi T$, pour tout $\varphi \in \Phi$, est-il c-replet.

§ 2. *Mesures sur l'espace* T *et espaces* $M_\beta T$, $M_\sigma(T)$, $M_\tau(T)$ *et* $M_t(T)$

Pour tout $f \in C^\infty(T)$, $\|f\| = \sup\{|f(t)|, t \in T\}$ est une norme sur $C^\infty(T)$. $M_\beta(T)$ désigne le dual de l'algèbre de Banach $C^\infty(T)$, donc l'espace des mesures de Radon sur le compact βT.

DEFINITION 2.1. [2] [12].

a) On dit qu'une mesure $\mu \in M_\beta(T)$ est σ-régulière lorsqu'elle vérifie la condition suivante :

   « Pour toute suite $(f_n)_n$ de $C^\infty(T)$ telle que $f_n \downarrow 0$, on a $\mu(f_n) \to 0$ ».

b) On dit qu'une mesure $\mu \in M_\beta(T)$ est τ-régulière lorsque elle vérifie la condition : « Pour toute suite généralisé $(f_i)_{i \in I}$ de $C^\infty(T)$ telle que $f_i \downarrow 0$ on a $\mu(f_i) \to 0$ ».

c) On dit que $\mu \in M_\beta(T)$ est t-régulière ou de Radon sur T si elle vérifie la condition suivante :

   « Pour toute suite généralisée uniformément bornée et convergente vers zéro pour la topologie de la convergence compacte on a $\mu(f_i) \to 0$ ».

d) On désigne alors par $M_\sigma(T)$, $M_\tau(T)$ et $M_t(T)$ respectivement les sous-espaces de $M_\beta(T)$ formés des mesures σ-régulières, τ-régulières et de Radon sur T.

   On a évidemment $M_t(T) \subseteq M_\tau(T) \subseteq M_\sigma(T) \subseteq M_\beta(T)$.

§ 3. *Topologies strictes, sous strictes et superstrictes sur* $C^\infty(T)$ ([3], [7], [8] *et* [10])

Soient X un espace localement compact, et $C_0(X)$ l'espace des fonctions qui s'annulent à l'∞. Buck dans [3] a défini la topologie stricte sur C(X) par la famille des semi-normes P_ξ, $P_\xi(f) = \|f\xi\|$, $\xi \in C_0(X)$.

Soit maintenant T un espace complètement régulier.

Pour tout compact $K \subseteq \beta T - T$, soit $C_K(T) = \{f \in C(T), f_K = 0\} = C_0(\beta T - K)$. Il est clair que, pour tout compact K, $C_K(T)$ définit une topologie β_K sur C(T). La topologie limite inductive des β_K, lorsque K décrit les compacts de $\beta T - T$ sera notée β et appelée topologie stricte sur C(T), tandis que la limite inductive des β_K lorsque K décrit les noyaux de $\beta T - T$ sera notée β_1 et nommée topologie super-stricte.

Pour définir la topologie sous-stricte β_0 sur C(T), notons d'abord t_k la topologie de la convergence compacte sur C(T) et pour chaque $r > 0$, $B_r = \{f \in C^\infty(T); \|f\| \leqslant r\}$. La famille $\mathscr{U} = \{U \subseteq C(T);$ U disque absorbant et, $\forall r > 0$,

$$\exists\, t_k \text{ — voisinage } V_r \text{ de } 0 \text{ tel que } V_r \cap B_r \subseteq U \cap B_r\}$$

est d'après [12] une base pour une topologie localement convexe qui est notée β_0 et dite sous-stricte. La topologie β_0 coïncide avec β si T est localement compact [8]. En outre on a, d'après th. 2.1. de [8], $\beta_0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1$. Le théorème suivant de [8] est utile pour la suite :

Théorème 3.1. C(T) muni des topologies β_0, β et β_1 admet respectivement pour dual $M_t(T)$, $M_\tau(T)$ et $M_\sigma(T)$.

§ 4. *La topologie stricte* β_Φ *et l'espace des mesures* $M_\Phi(T)$

Pour toute (p.c.u.) $\varphi \in \Phi$, $K_\varphi = \beta T - \theta_\varphi T$ est un compact de βT disjoint de θT. Notons β_φ la topologie β_{K_φ} sur $C^\infty(T)$ associée à K_φ comme dans [7] et soit β_Φ la topologie limite inductive des β_φ. Alors on a

Proposition 4.1. La topologie β_Φ est moins fine que β_1 et plus fine que β.

Preuve. Évidemment $\beta \leqslant \beta_\Phi$ d'après la définition de β. Montrons que $\beta_\Phi \leqslant \beta_1$. Soit Z un noyau de $\beta T - T$, $Z = \{u \in \beta T; \bar{f}(u) = 0\}$.

Posons $U_n^\beta = \left\{u \in \beta T; \bar{f}(u) > \dfrac{1}{n}\right\}$. La famille des conoyaux $(U_n^\beta)_n$ recouvre $\beta T - Z$, il existe d'après [4] une p.c.u. $\overline{\varphi} = (\overline{\varphi}_n)_n$ associée a ce recouvrement. Soit $\varphi = (\varphi_n)_n$, où $\varphi_n = \varphi_n|_T$.

On a évidemment $\beta T - Z \subseteq \theta_\varphi T$. En outre, si φ_n^β est le prolongement de φ_n à βT, on aura :

$$\{u; \varphi_n^\beta(u) > 0\} \subseteq \left\{u \in \beta T; \bar{f}(u) \geqslant \frac{1}{n}\right\} \subseteq \beta T - Z.$$

D'où il résulte que

$$\theta_\varphi T \subseteq \beta T - Z \text{ et par suite } \theta_\varphi T = \beta T - Z.$$

On note $M_\Phi(T)$ le dual topologique de $C^\infty(T)$, muni de la topologie β_Φ; alors d'après la proposition précédente, on a :

$$M_\tau(T) \subseteq M_\Phi(T) \subseteq M_\sigma(T).$$

Désignons par Φ_θ l'ensemble des (p.c.u.) de θT.

Proposition 4.2. Pour tout espace complètement régulier séparé T, on a, $M_\Phi(T) = M_{\Phi_\theta}(\theta T)$.

Preuve. Si $\varphi^{\theta} = (\varphi_i^{\theta})_{i\in I}$ est une (p.c.u.) de θT, alors $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I}$, où $\varphi_i = \varphi^{\theta}_{i|T}$, est une (p.c.u.) de T et $\theta_{\varphi}(\theta T) = \theta_{\varphi} T$. Ce qui prouve que $M_{\Phi}(T) \subseteq M_{\Phi_{\theta}}(\theta T)$.

Inversement, montrons que $M_{\Phi_{\theta}}(\theta T) \subseteq M_{\Phi}(T)$ en montrant que chaque $M_t(\theta_{\theta} T)$ contient un $M_t(\theta_{\psi}(\theta T))$, où $\psi \in \Phi_{\theta}$.

Soient $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I}$ une (p.c.u.) de T, $\theta_{\varphi} T = \bigcup_{i\in I} \{u; \varphi_i^{\beta}(u) > 0\}$ et $d_{\varphi}(u, v) = \sup_{i\in I} |\varphi_i^{\theta}(u) - \varphi_i^{\theta}(v)|$ l'écart sur θT défini par $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I}$. La famille d'ouverts $(\{u; \varphi_i^{\theta}(u) > 0\})_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de l'espace paracompact $(\theta T, d_{\varphi})$, alors il existe une (p.c.u.) $\psi' = (\psi_{\alpha}^{\theta})_{\alpha\in\Lambda}$ associée à un recouvrement localement fini plus fin. Pour tout $\alpha \in \Lambda$, il existe $i_{\alpha} \in I$ tel que

$$\{u; \psi_{\alpha}^{\theta}(u) > 0\} \subseteq \{u; \varphi_{i_{\alpha}}^{\theta}(u) > 0\}.$$

Soit $g_{\alpha}^{\theta} = \psi_{\alpha}^{\theta}\varphi_{i_{\alpha}}^{\theta}$, alors $g_{\alpha}^{\theta} \leqslant \varphi_{i_{\alpha}}^{\theta}$, et, par suite,

$$\{u; g_{\alpha}^{\theta}(u) > 0\} = \{u; \psi_{\alpha}^{\theta}(u) > 0\} \subseteq \{u; \varphi_{i_{\alpha}}^{\theta}(u) > 0\}.$$

En outre $g_{\alpha}^{\beta} \leqslant \varphi_{i_{\alpha}}^{\beta}$, il en résulte que,

$$\{u; g_{\alpha}^{\beta}(u) > 0\} \subseteq \{u; \varphi_{i_{\alpha}}^{\beta}(u) > 0\} \subseteq \theta_{\varphi} T.$$

Soit $g = \sum_{\alpha\in\Lambda} g_{\alpha}^{\theta}$, alors $g^{\theta} > 0$ sur θT. Soit $f_{\alpha} = \dfrac{g_{\alpha}^{\theta}}{g^{\theta}}$, alors $\sum_{\alpha\in\Lambda} f_{\alpha}^{\theta} = 1$ et $\operatorname{supp} f_{\alpha}^{\theta} = \operatorname{supp} g_{\alpha}^{\theta} \subseteq \operatorname{supp} \psi_{\alpha}^{\theta}$.

Donc la famille $\psi = (f_{\alpha}^{\theta})_{\alpha\in\Lambda}$ est une (p.c.u.) de θT et on a :

$$\{u; f_{\alpha}^{\beta}(u) > 0\} = \{u; \left(\frac{g_{\alpha}^{\theta}}{g^{\theta}}\right)^{\beta}(u) > 0\} = \{u; g_{\alpha}^{\beta}(u) > 0\}.$$

Ainsi on obtient, $\theta_{\psi}(\theta T) \subseteq \theta_{\varphi} T$ et $M_t(\theta_{\psi}(\theta T)) \subseteq M_t(\theta_{\varphi} T)$.

DEFINITION 4.4. Un espace complètement régulier T est dit presque paracompact (p- paracompact) si, pour tout compact $K \subseteq \beta T - T$, il existe $\varphi \in \Phi$ tel que $\theta_{\varphi} T \cap K = \varnothing$.

PROPOSITION 4.5. Tout espace paracompact est p-paracompact.

Preuve. Soit K un compact de βT disjoint de T. Pour tout $x \in T$, il existe V_x, voisinage compact de x dans βT, disjoint de K.

La famille $(\mathring{V}_x \cap T)_{x\in T}$ est un recouvrement ouvert de l'espace paracompact T; il existe une (p.c.u.) $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I}$ de T associée à un recouvrement localement fini plus fin.

Pour tout $i \in I$, $\{u; \varphi_i^{\beta}(u) > 0\} \subseteq \overline{\{u; \varphi_i^{\beta}(u) > 0\}} \subseteq V_{x_i}$.

D'où,

$$\theta_{\varphi} T = \bigcup_{i\in I} \{u; \varphi_i^{\beta}(u) > 0\} \subseteq \bigcup_{i\in I} V_{x_i}$$

et par suite $\theta_{\varphi} T \cap K = \varnothing$.

PROPOSITION 4.6. Tout espace p-paracompact est c-replet.

Preuve. Ceci provient du fait que, si T est p- paracompact, alors

$$T = \theta T = \bigcap_{\varphi\in\Phi} \theta_{\varphi} T \text{ d'après le lemme (1.1).}$$

PROPOSITION 4.7. Un espace p-paracompact et localement compact est paracompact.

Preuve. En effet, $\beta T - T = K$ est compact. D'après la p-paracompacité de T, il existe $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I}$ (p.c.u.) de T tel que $T = \theta_\varphi T$. D'après [9], T est paracompact.

QUESTION 4.8. Un espace T localement compact c-replet est-il nécessairement p-paracompact, ou ce qui est équivalent paracompact?

Dans [7] Mosiman a prouvé que $M^\infty(T)$ est le dual de $C^\infty(T)$ muni de la topologie stricte β_e définie par la famille L des compacts de $\beta T - T$.

$$L = \{\{u \in \beta T;\ \sum_{\alpha \in J} \varphi_\alpha^\beta(u) \leqslant 1 - \varepsilon\}, \forall\, J \subseteq I,\ J \text{ fini},\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1\},$$

et Wheeler, Sentilles dans [9] ont prouvé que β_e n'est autre que β_u; ainsi $M^\infty(T) = M_u(T)$ l'espace des mesures u-additives.

Il en résulte que $M_\tau(T) \subseteq M_u(T) \subseteq M_\Phi(T)$.

PROPOSITION 4.9. Si T est p-paracompact, alors $M_\Phi(T) = M_\tau(T)$.

Preuve. Si T est p-paracompact alors, pour tout $K \subseteq \beta T - T$, K compact, il existe $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I}$ (p.c.u.) de T telle que $\theta_\varphi T \cap K = \varnothing$.

COROLLAIRE 4.10. [9]. Si T est paracompact, $M_u(T) = M_\tau(T)$.

Preuve. Ceci découle de (4.5) et (4.9).

QUESTION 4.11. A-t-on $M_\Phi(T) = M_\tau(T) \Rightarrow$ T est p-paracompact?

PROPOSITION 4.12. On a $\theta T = T$ si $M_\Phi(T) = M_\tau(T)$.

Preuve. Si $M_\tau(T) = M_\Phi(T)$ et $u \in \theta T$, alors d'après (Lemme 1.1) u appartient à $M_t(\theta_\varphi T)$ pour tout $\varphi \in \Phi$. Il en résulte que $u \in M_\Phi(T) = M_\tau(T)$.

Donc d'après ([2], prop. 2.2.4) u appartient à T.

THÉORÈME 4.13. On a $M_\sigma(T) = M_\Phi(T)$ si et seulement si $\theta T = \upsilon T$.

Preuve. Si $M_\sigma(T) = M_\Phi(T)$, soit $u \in \upsilon T$, alors $u \in M_\sigma(T) = M_\Phi(T)$. Il en résulte que $u \in M_t(\theta_\varphi T)$, $\forall\, \varphi \in \Phi$, et par suite, $u \in \theta T$. D'où $\theta T = \upsilon T$.

Inversement, supposons $\theta T = \upsilon T$ il résulte d'après (th. 3.1. [9]) que $M_\sigma(T) = M_u(T)$ et par suite $M_\sigma(T) = M_\Phi(T)$, car on a

$$M_u(T) \subseteq M_\Phi(T) \subseteq M_\sigma(T).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BUCHWALTER, Problèmes de complétion topologique, D.E.A. Math. Pures, Éd. ronéotypée, Lyon 1969-1970.

[2] H. BUCHWALTER, Intégration sur un espace topologique et mesure de Wiener. *Notes d'enseignement*, **8**, 1977.

[3] R. C. BUCK, Bounded continuous functions on a locally compact space, *Michigan Math. J.*, **5** (1958), 95-104.

[4] G. DE MARCO and R. G. WILSON, Real compactness and partitions of unity, *Proc. Amer., Math. Soc.*, **30** (1971), pp. 189-194.

[5] R. HAYDON, On compactness in spaces of measures and measure compact spaces, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **29** (1974), 1-16.

[6] D. H. FREMLIN, J. H. GARLING and R. G. HAYDON, Bounded measures on topological spaces, *Proc. London. Math. Soc.*, **25** (1972), pp. 115-136.

[7] S. MOSIMAN, Strict topologies and the ordered vector space C(X) (Submitted).

[8] D. F. SENTILLES, Bounded continuous functions on a completely regular space, *Trans. of the Amer. Math. Society*, **168** (1972), pp. 311-336.

[9] D. F. SENTILLES and R. WHEELER, Linear functionals and partitions of unity in $C_b(X)$.

[10] R. WHEELER, The strict topology, separable measures, and paracompactness. *Pacific. J. of Math* **47** (1973).

[11] W. HABRE, Partition continue de l'unité et c-repletion. *Manuscripta math.*, **27** (1979), 329-340.

[12] V. S. VARADARAJAN, Measures on topological spaces, (russian). Translated in *American Math. Soc.*, (2) **78** (1965), pp. 161-228.

Université Libanaise
Faculté des Sciences
Hadet-Beyrouth (Liban)