Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 51e année, 1-2, 1981, pp. 42-46

SOUS-PERSPECTIVITÉ ET SOUS-PROJECTIVITÉ DANS LES LATTIS DE FERMÉS CONVEXES

par René FOURNEAU

SUMMARY

We give some criteria for two elements of a lattice of closed convex sets to be subperspective or subprojective.

1. Introduction et terminologie

Cet article fait suite à [2]. Nous y étudions les paires d'éléments sous-perspectifs et sous-projectifs au sein du lattis $\mathscr{B}(E)$ des bornés fermés convexes de l'espace vectoriel topologique localement convexe séparé E.

Pour ce qui concerne la géométrie des espaces vectoriels, nous utiliserons librement les notations et la terminologie de [1]. Le livre de Szász [3] nous servira de référence pour ce qui est des lattis. Rappelons cependant les deux définitions essentielles pour ce qui suit.

Un élément a d'un lattis L avec minimum 0 est dit *sous-perspectif* à $b \in L$ s'il existe $x \in L$ tel que

$$a \leqslant b \vee x \quad \text{et} \quad a \wedge x = 0.$$

On dit que a est *sous-projectif* à b s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in L$ tels que

$$a_0 = a, \quad a_n = b$$

et a_{i-1} est sous-perspectif à a_i, $(i = 1, \ldots, n)$.

2. Critères de sous-perspectivité et sous-projectivité

2.1. *Soit* E *un espace localement convexe séparé.*

Si B_1 *et* B_2 *appartiennent à* $\mathscr{B}$ *et si* B_2 *ne suit pas strictement* B_1, B_2 *est sous-perspectif à* B_1.

Dans les conditions de l'énoncé, $B_1 = B_2$ ou $B_1 \setminus B_2$ n'est pas vide. La première éventualité ne laisse pas de place au doute; pour la seconde, choisissons $x_1 \in B_1 \setminus B_2$: $B_2 - x_1$ appartient à $\mathscr{B}$ et ne contient pas 0. Hors le cas banal où B_2 est vide, il existe donc une forme linéaire continue f sur E et une constante $C_1 > 0$ telles que

Présenté par F. Jongmans, le 19 novembre 1981.

$$\inf_{x \in B_2} f(x - x_1) \geqslant C_1.$$

De plus, comme $B_2 - x_1$ est borné, il existe $C_2 > C_1$ tel que

$$\sup_{x \in B_2} f(x - x_1) \leqslant C_2.$$

Soit alors $\lambda > 0$ tel que $\lambda C_1 > C_2$ (ce qui exige que $\lambda > 1$). Les ensembles $B_2 - x_1$ et $\lambda(B_2 - x_1)$ sont visiblement disjoints. De plus, $B_2 - x_1 \subset \bar{c}[\{0\} \cup \lambda(B_2 - x_1)]$, puisque $\lambda > 1$. De là,

$$B_2 \cap [\lambda(B_2 - x_1) + x_1] = \varnothing$$

et

$$B_2 \subset \bar{c}(\{x_1\} \cup [\lambda(B_2 - x_1) + x_1]) \subset \bar{c}(B_1 \cup [\lambda(B_2 - x_1) + x_1]).$$

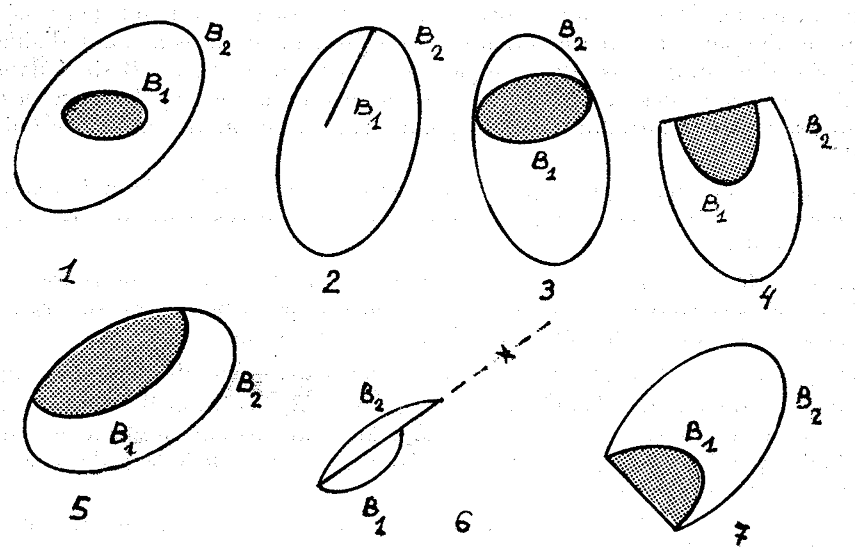
En d'autres termes, B_2 est sous-perspectif à B_1.

2.2. Dans le même ordre d'idées, épinglons la proposition suivante.

Quel que soit E, *aucun* B_2 *non vide n'est sous-perspectif au vide.*

C'est évident.

2.3. Lorsque $B_1 \Subset B_2$, B_2 peut être ou n'être pas sous-perspectif à B_1. Le lecteur s'en convaincra en examinant les diverses figures de la planche : dans le cas des figures 1, 2, 3 et 4, B_2 n'est pas sous-perspectif à B_1, au contraire des figures 5, 6 et 7.



Établissons, pour le plan $\mathbb{R}^2$, deux critères qui permettent de conclure aisément dans chaque cas.

a) *Si* B_1 *et* B_2 *appartiennent à* $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ *et si* B_2 *est un corps convexe* (*) *qui suit strictement* B_1, B_2 *est sous-perspectif à* B_1 *si et seulement s'il existe deux points* a, b *(éventuellement confondus) de* $\dot{B}_1 \cap \dot{B}_2$ *tels que* :

(*) C'est-à-dire un convexe d'intérieur non vide.

1° B_2 *admette deux droites d'appui distinctes dont* a *et* b *sont respectivement des points de contact;*

2° *si* a *et* b *sont distincts, la trace de* B_2 *sur l'un des demi-plans fermés associés à* $(a : b)$ *est incluse dans* B_1.

Établissons la nécessité de la condition. Supposons donc qu'il existe $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, disjoint de B_2, tel que $B_2 \subset \bar{c}(B_1 \cup B) = c(B_1 \cup B)$ (rappelons que, dans $\mathbb{R}^2$, l'enveloppe convexe d'un compact K est compacte, donc $c(K) = \bar{c}(K)$). On remarquera que B n'est pas vide.

Nous allons d'abord démontrer que B_2 et B admettent des droites d'appui communes extérieures (la signification de ce dernier terme apparaîtra dans la suite).

Comme B_2 et B sont compacts, convexes et disjoints, ils peuvent être séparés strictement par une droite D.

Considérons l'ensemble des segments $[x : y]$, où $x \in B_2$ et $y \in B$. Leur réunion est l'enveloppe convexe de $B_2 \cup B$, soit, puisque B_2 et B sont compacts et convexes, $B_2 \vee B$. Dès lors, les traces de ces segments sur D forment un segment fermé $[u : v]$. On notera que u et v coïncident si et seulement si B et B_2 sont des segments alignés, condition qui n'est pas réalisée ici, puisque B_2 est un corps convexe.

Le point u est trace sur D d'au moins un segment du type considéré, soit, $[x_u : y_u]$, $(x_u \in B_2, y_u \in B)$.

La droite $(x_u : y_u)$ est une variété d'appui de B_2 et de B, B_2 et B étant situés dans un même demi-plan fermé associé à $(x_u : y_u)$ (c'est à ce sens que $(x_u : y_u)$ est une droite d'appui commune extérieure), ce demi-plan fermé contenant d'ailleurs $[u : v]$. En effet, supposons par exemple qu'il existe un point $y \in B$ situé dans le demi-plan ouvert associé à $(x_u : y_u)$ et ne contenant pas $[u : v]$. Dans ce cas, le segment $[x_u : y]$ rencontrerait B en un point situé en dehors de $[u : v]$, ce qui est absurde.

On montre de même que le point v donne lieu à une droite d'appui commune extérieure à B_2 et B; soit $(x_v : y_v)$. Comme B_2 est un corps convexe, $(x_u : y_u)$ et $(x_v : y_v)$ sont distinctes.

La trace de $(x_u : y_u)$ sur B_2 est un segment fermé S_u, comme intersection non vide d'un compact convexe avec une droite. Soit a le point de S_u qui, sur $(x_u : y_u)$, est le plus éloigné de u. On définit de même le point $b \in (x_v : y_v) \cap B_2$.

Les points a et b appartiennent évidemment à $\dot{B}_2$. Montrons qu'ils appartiennent à $\dot{B}_1$, donc à B_1. Comme $a \in B_2$, $a \in \bar{c}(B_1 \cup B) = c(B_1 \cup B)$, donc il existe $x \in B_1$ et $y \in B$ tels que $a \in [x : y]$. Comme $B_1 \subset B_2$, x appartient au même demi-plan fermé limité par $(x_u : y_u)$ que y, donc $x \in (x_u : y_u)$. Vu la définition de a, $x = a$, donc $a \in B_1$. On procède de même pour b.

Si $a \neq b$, B est inclus dans un demi-plan ouvert associé à $(a : b)$. En effet, la trace de $(a : b)$ sur le demi-plan fermé déterminé par $(x_u : y_u)$ et contenant $[u : v]$ est la demi-droite $[a : b)$. De même, la trace de $(a : b)$ sur le demi-plan fermé déterminé par $(x_v : y_v)$ et contenant $[u : v]$ est $[b : a)$. De là, $B \cap (a : b) \subset [a : b) \cap [b : a) = [a : b]$. Comme $[a : b]$ est inclus dans B_2 disjoint de B, $B \cap (a : b) = \varnothing$ et B est inclus dans un demi-plan ouvert associé à $(a : b)$.

Soit donc, dans le cas où $a \neq b$, $x \in B_2$ situé dans le demi-plan ouvert déterminé par $(a : b)$ et qui ne contient pas B. Comme $B_2 \subset c(B_1 \cup B)$, il existe $x_1 \in B_1$ et $y \in B$ tels que $x \in [x_1 : y]$. Il est évident que x_1 et x appartiennent au même demi-plan ouvert déterminé par $(a : b)$. Dès lors, x_1 et y appartiennent chacun à l'un des demi-plans ouverts déterminés par $(a : b)$, donc $[x_1 : y] \cap (a : b)$ est un singlet $\{x'\}$. De plus, $x' \in [a : b]$. En effet, $[a : b]$ est la trace sur $(a : b)$ de l'intersection T des demi-plans fermés déterminés respectivement par $(x_u : y_u)$ et $(x_v : y_v)$ et contenant $[u : v]$ (voir ci-avant) et $[x_1 : y]$ est inclus dans $c(B_2 \cup B)$ qui est lui-même inclus dans T. De là, puisque B_1 est convexe, $x \in [x_1 : x'] \subset B_1$.

Ceci achève la preuve de la nécessité de la condition.

Établissons la suffisance. S'il existe deux points distincts a et b de $\dot{B}_1 \cap \dot{B}_2$ répondant aux conditions de l'énoncé, désignons par D_a et D_b les droites d'appui de B_2, distinctes, dont a et b sont respectivement des points de contact. L'intersection I des demi-plans fermés associés à ces droites et contenant B_2 est soit un cône convexe fermé, distinct d'un demi-plan fermé, soit une tranche vraie. Comme B_2 est borné, il existe une parallèle D à $(a : b)$, située du côté de $(a : b)$ qui contient $B_2 \setminus B_1$, qui ne rencontre pas B_2. Ainsi, $B = D \cap I$ est un compact convexe et

$$B_2 \setminus B_1 \subset c(\{a, b\} \cup B),$$

d'où la conclusion.

Si les points a et b dont l'existence est supposée sont confondus, la preuve est identique mais I est forcément un cône convexe fermé distinct d'un demi-plan fermé.

b) *Si* B_1 *et* B_2 *appartiennent à* $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ *et si* B_2 *est un segment qui suit strictement* B_1, B_2 *est sous-perspectif à* B_1 *si et seulement si* B_1 *contient une extrémité de* B_2 (*ce qui implique que* B_2 *est un segment vrai*).

Pour établir la nécessité de la condition, on peut reprendre, à des modifications infimes près, la preuve de a).

Voici une preuve beaucoup plus rapide. Supposons que B_1 ne contienne aucune des extrémités de B_2 et qu'il existe $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, disjoint de B_2, tel que

$$B_2 \subset \bar{c}(B_1 \cup B) = c(B_1 \cup B).$$

On voit immédiatement que $B_1 \neq \varnothing$ et donc que B_2 n'est pas un singlet : $B_2 = [a : b], a \neq b$. Comme $a \in c(B_1 \cup B)$, il existe $x \in B \cap [b : a)$; de même, puisque $b \in c(B_1 \cup B)$, il existe $y \in B \cap [a : b)$. De là, $[x : y] \supset [a : b]$, ce qui conduit, vu la convexité de B, à l'absurdité $B_2 \subset B$. La condition est donc nécessaire.

Établissons la suffisance. On peut écrire $B_2 = [a : b]$, avec $a \neq b$. Si B_1 contient une des extrémités de $[a : b]$ (par exemple a), il suffit de poser $B = \{x\}$, où $x \in (a : b) \setminus (a : b]$.

2.4. *Dans un espace localement convexe séparé, deux éléments quelconques de* $\mathscr{B}$, *distincts de* $\varnothing$, *sont toujours mutuellement sous-projectifs*.

Soient B_1, B_2 ces éléments. Si B_2 ne suit pas strictement B_1, il est sous-projectif à B_1, vu 1. Si $B_1 \subset B_2$, il existe $B \in \mathscr{B}$ tel que $B \cap B_2 = \varnothing$. Le théorème 1 permet alors d'affirmer que B_2 est sous-perspectif à B et que B est sous-perspectif à B_1 Dès lors, B_2 est sous-projectif à B_1.

On peut évidemment reprendre le même raisonnement pour établir que B_1 est sous-projectif à B_2, en échangeant les rôles de B_1 et B_2.

RÉFÉRENCES

[1] J. BAIR, R. FOURNEAU, *Étude géométrique des espaces vectoriels : une introduction. Lecture Notes in Math.*, **489**, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[2] R. FOURNEAU, Lattis de fermés convexes. *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, **41**, 1972, pp. 468-483.

[3] G. SZÀSZ, *Théorie des treillis* (trad. Chambadal), Dunod, Paris, 1971.

Institut Supérieur
Industriel Liègeois
2, rue Stévart
B-4000 Liège

Institut de Mathématique
Université de Liège
15, avenue des Tilleuls
B-4000 Liège