Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 1, n° 1, 1932, p. 5 - 6

Sur les tangentes de Darboux et de Segre en un point d'une surface,

par LUCIEN GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liége.

Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point x de cette surface satisfont à un système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles que l'on peut ramener à la forme (Wilczynski)

$$x^{20} + 2b\,x^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2a\,x^{10} + c_2 x = 0,$$

a, b n'étant pas identiquement nulles. On a posé

$$x^{20} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \cdots .$$

Tout point du plan tangent à la surface (x) au point x peut être représenté par

$$z_1 x + z_2 x^{10} + z_3 x^{01};$$

z_1, z_2, z_3 sont les coordonnées locales de ce point.

Considérons une droite g d'équation locale

$$g\,(z_1, z_2, z_3) \equiv z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = 0,$$

ne passant pas par le point x (1, 0, 0). La conique osculatrice à

Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 1, n° 1, 1932, p. 5 - 6

l'asymptotique u au point x et tangente à la droite g au point où celle-ci coupe la tangente à l'asymptotique v a pour équation

$$b z_2^2 + z_3 (z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3) = 0. \qquad (\Gamma_u)$$

En intervertissant les rôles u, v, on trouve une seconde conique

$$a z_3^2 + z_2 (z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3) = 0. \qquad (\Gamma_v)$$

Les droites projetant du point x les trois autres points d'intersection des coniques Γ_u, Γ_v sont données par

$$a z_3^3 - b z_2^3 = 0.$$

Ce sont précisément les tangentes de Segre à la surface (x) au point x, et cette propriété résulte d'un théorème de M. Cech. (*L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista proiettivo*, Annali di Matematica, 1922, s. 3, t. 31, pp. 191-206).

Le produit de la polarité par rapport à la conique Γ_u par la polarité par rapport à la conique Γ_v est l'homographie H :

$$\begin{aligned} z_2' &= \rho z_3, \\ 2 a z_3' &= \rho (z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3), \\ z_1' + \alpha_2 z_2' + \alpha_3 z_3' &= 2 b \rho z_2. \end{aligned}$$

L'homographie H a la période 3 et n'est pas homologique.

Les droites unies de cette homographie ont pour équation

$$\varepsilon (z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3) + 2 z_2 \sqrt[3]{a b^2} + 2 \varepsilon^2 z_3 \sqrt[3]{b a^2} = 0,$$

où ε est une racine cubique de l'unité. Les points de rencontre de ces droites avec g sont projetés du point x par les droites

$$a z_3^3 + b z_2^3 = 0,$$

c'est-à-dire par les tangentes de Darboux à la surface (x) au point x. On a ainsi une nouvelle construction de ces tangentes.

Les points unis de l'homographie H se trouvent sur les tangentes de Segre.

L'homographie H fait correspondre Γ_v à Γ_u et à Γ_v une nouvelle conique

$$(z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3)^2 + 8 a b z_2 z_3 = 0. \qquad (\Gamma)$$

Si l'on prend pour g une droite définie d'une manière intrinsèque, on obtient ainsi une conique définie également d'une manière intrinsèque.

Liége, le 22 décembre 1931.