Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 71, 3, 2002, pp. 169-187

EQUATIONS ET SYSTEMES DU TYPE DE SCHRÖDINGER A RACINES CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE DEUX

Mouna GHEDAMSI[a], Daniel GOURDIN[a], Mustapha MECHAB[b] et Jiro TAKEUCHI[c]

a: Université Paris 6, U.F.R 920 - U.M.R 9994, 4 Place Jussieu, 75252 Paris, France.
b: Laboratoire de mathématiques, Université Djilali Liabès, B.P 89, 22000 Sidi Bel Abbès, Algérie.
c: Science University of Tokyo, Campus Oshamanbe, Hokkaido 049-3514, Japan.

Abstract

For 2-evolutive operators in the sens of Petrowsky which are scalar or matricial 2×2 or 3×3 with real characteristic roots of constant multiplicities lees than two, we give sufficient conditions such that the Cauchy problem both for the future and for the past is well posed in Sobolev spaces. The results are extensions of those published in a previous note at C. R. Acad. Sc ([6]).

1 Introduction

Dans un article précédent ([3], [4]) deux des auteurs de ce travail avaient étudié le problème de Cauchy pour des équations du type Schrödinger d'ordre m, à caractéristiques au sens de Petrowsky ([5]) de multiplicité constantes quelconques en prenant des hypothèses de bonne décomposition analogues à celles utilisées dans le cas d'hyperbolicité faible ([2]).

Ici nous affaiblissons les hypothèses dans le cas d'une équation à racines caractéristiques de multiplicités deux et nous examinons le cas des systèmes 2×2 et 3×3 du type Schrödinger , puis un cas particulier de système $N \times N$.

2 Equations de Schrödinger avec racines caractéristiques de multiplicité constantes au plus deux

On considère l'opérateur $P(X, D_x, D_t)$ défini par

$$(1) \qquad P(X, D_x, D_t) = D_t{}^m + a_1(x, D_x) D_t{}^{m-1} + \ldots + a_m(x, D_x)$$

$a_j(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq 2j} a_{\alpha j}(x) D_x{}^\alpha$, $a_{\alpha j} \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [-T,T]$, $D_t = i\dfrac{\partial}{\partial t}$, $D_x = -i\dfrac{\partial}{\partial x}$.

On note les parties quasi homogènes de degré $2m-k$:

(2) $$P_{2m-k} = a_1{}^k(x,\xi)\tau^{m-1} + \ldots + a_m{}^k(x,\xi)$$

$a_j{}^k(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2j-k} a_{\alpha j}(x)\xi^\alpha.$

Elles vérifient:

$$\forall \rho > 0, \quad P_{2m-k}(x,\rho\xi,\rho^2\tau) = \rho^{2m-k}P_{2m-k}(x,\xi,\tau)$$

En admettant que $a_j{}^k(x,\xi) \equiv 0$ lorsque $2j-k>0$,

i) On suppose que la partie principale P_{2m}, la partie sous principale P_{2m-1} et P_{2m-2} sont à coefficients réels constants.

ii) Le zéros en τ de $P_{2m}(\xi,\tau)$, notés $\lambda_j^0(\xi)$, sont supposés réels et P_{2m} admet la décomposition suivante en facteurs $\mathcal{H}_s(\xi,\tau) \in \mathrm{IR}[\xi,\tau]$ premiers entre eux dans $\mathrm{IR}[\tau]$ $(s=0,1)$:

$$P_{2m}(\xi,\tau) = [\mathcal{H}_0(\xi,\tau)]^2\mathcal{H}_1(\xi,\tau)$$

$$\mathcal{H}_0(\xi,\tau) = \prod_{j=1}^{m_0}\left[\tau - \lambda_j^0(\xi)\right], \quad \mathcal{H}_1(\xi,\tau) = \prod_{j=m_0+1}^{m-m_0}\left[\tau - \lambda_j^0(\xi)\right].$$

$\lambda_j^0(\xi) \neq \lambda_k^0(\xi) \quad (j \neq k,\ \xi \neq 0).$

$\lambda_j^0(\xi) \neq 0 \quad (1 \leq j \leq m-m_0,\ \xi \neq 0).$

$\lambda_j^0(\xi)$ positivement homogène de degré 2 en ξ.

iii) Le polynôme $\mathcal{H}_0(\xi,\tau)$ divise $P_{2m-1}(\xi,\tau)$ dans $\mathrm{IR}[\xi,\tau]$

$$P_{2m-1} = \mathcal{H}_0 P'_{2(m-m_0)-1}$$

iv) $\left[P'_{2(m-m_0)-1}\right]^2(\tau=\lambda_j^0(\xi)) > 4\left[P_{2m-2}\mathcal{H}_1\right](\tau=\lambda_j^0(\xi)), \quad \forall\xi \in \mathrm{IR}^n\backslash 0,\ \forall j=1,\ldots,m_0.$

Nous obtenons le théorème suivant:

Théorème 1 *Pour tout φ_0, $\varphi_1,\ldots,$ φ_m dans $H^{+\infty}(\mathrm{IR}^n)$ et toute fonction $f \in C^1([-T,T],H^{+\infty}(\mathrm{IR}^n))$ il existe une solution unique du problème de Cauchy pour le futur et le passé*

(3) $$\begin{cases} P(x,D_x,D_t)u(x,t) = f(x,t) \text{ sur } \mathrm{IR}^n \times [-T,T] \\ u(x,0) = \varphi_0,\ldots,D_t^{m-1}u(x,0) = \varphi_{m-1}(x), \quad \text{dans } \mathrm{IR}^n \end{cases}$$

telle que $u \in C^{m-1}([-T,T],H^{+\infty}(\mathrm{IR}^n))$. De plus on a l'inégalité d'énergie suivante: $u \in C^m([-T,T],H^{+\infty}(\mathrm{IR}^n))$

$$\left[\sum_{k=1}^{m-1} \| <D_x>^{2(m-1-k)} D_t^{k-1}u(.,t)\|_s^2\right]^{1/2} \leq C_{(s,T)}\left\{\left[\sum_{k=1}^{m-1} \| <D_x>^{2(m-1-k)} D_t^{k-1}u(.,0)\|_s^2\right]^{1/2} + \left|\int_0^t \|P(x,D_x,D_t)u(.,\tau)\|_s d\tau\right|\right\}.$$

2.1 Condition de bonne décomposition équivalente aux conditions i) ii) iii) et iv)

On pose

$$Q_{2m_0}(\xi,\tau)=\prod_{j=1}^{m_0}(\tau-\lambda_j^0(\xi))=\mathcal{H}_0(\xi,\tau)$$

$$R_{2(m-m_0)}(\xi,\tau)=\prod_{j=1}^{m-m_0}(\tau-\lambda_j^0(\xi))=(\mathcal{H}_0\mathcal{H}_1)(\xi,\tau).$$

Proposition 1 *Sous les hypothèses i) à iv), il existe deux opérateurs différentiels en t et pseudo différentiel en x sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ définis par* $Q(x,D_x,D_t)=D_t^{m_0}+\sum_{k=1}^{m_0}b_k(x,D_x)D_t^{m_0-k}$, $R(x,D_x,D_t)=D_t^{m-m_0}+\sum_{k=1}^{m-m_0}c_k(x,D_x)D_t^{m-m_0-k}$ *avec* $b_k(x,D_x)\in BL^{2k}(\mathbb{R}^n)$ $(1\leq k\leq m_0)$, $c_l(x,D_x)\in BL^{2l}(\mathbb{R}^n)$ $(1\leq l\leq m-m_0)$, *de symboles principaux respectifs* Q_{2m_0} *et* $R_{2(m-m_0)}$ *et de symboles sous principaux réels à coefficients constants notés respectivement* $Q_{2m_0-1}(\xi,\tau)=\sum_{k=1}^{m_0}b_k^1(\xi)\tau^{m_0-k}$ *et* $R_{2(m-m_0)-1}(\xi,\tau)=\sum_{l=1}^{m-m_0}c_l^1(\xi)\tau^{m-m_0-l}$, *tels que* $P-QR$ *soit de la forme*

$$P-QR=\sum_{k=0}^{m-2}d_k(x,D_x)D_t^{m-2-k}\qquad(4)$$

avec $d_k\in BL^{2k}(\mathbb{R}^n)$ $(0\leq k\leq m-2)$.

Preuve.

On utilise la relation

$$\sigma(QR)\sim\sum_{\alpha\geq0}\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}\left[D_\zeta^\alpha Q(X,\zeta)\right]\left[D_X^\alpha R(X,\zeta)\right]$$

avec $Q=\sum_{k=0}^{2m_0}Q_{2m_0-k}(X,\zeta)$, $R=\sum_{l=0}^{2(m-m_0)}R_{2(m-m_0)-l}(X,\zeta)$, où $X=(x,t)$, $\zeta=(\xi,\tau)$ en notant de la même manière l'opérateur et le symbole

On a les développements $P_{2m-k}=\sum_{j=1}^{m}a_j^kD_t^{m-j}$, $a_j^k\in BL^{2j-k}(\mathbb{R}^n)$ (en convenant que $a_j^k=0$ si $2j-k<0$).

Ainsi, $P_{2m-4}=\sum_{k=0}^{m-2}a_{k+2}^4D_t^{m-2-k}$, $a_{k+2}^4\in BL^{2k}(\mathbb{R}^n)$ et $P-QR$ vérifie (4) si et seulement si on a les quatre relations

$$P_{2m-k}=(QR)_{2m-k},\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ 3\qquad(5)$$

c'est à dire

$$
\begin{array}{rcl}
P_{2m} & = & Q_{2m_0}R_{2(m-m_0)} = Q_{2m_0}R_{2m_1} = (\mathcal{H}_0)^2\mathcal{H}_1 \mathrm{I} \\
P_{2m-1} & = & Q_{2m_0}R_{2m_1-1} + Q_{2m_0-1}R_{2m_1} \\
P_{2m-2} & = & Q_{2m_0}R_{2m_1-2} + Q_{2m_0-1}R_{2m_1-1} + Q_{2m_0-2}R_{2m_1} + \sum\limits_{|\alpha|=1} Q_{2m_0}{}^{(\alpha)}R_{2m_1-1(\alpha)} \\
P_{2m-3} & = & Q_{2m_0}R_{2m_1-3} + Q_{2m_0-1}R_{2m_1-2} + Q_{2m_0-2}R_{2m_1-1} + Q_{2m_0-3}R_{2m_1} \\
 & & + \sum\limits_{|\alpha|=1} Q_{2m_0}{}^{(\alpha)}R_{2m_1-2(\alpha)} + \sum\limits_{|\alpha|=1} Q_{2m_0-1}{}^{(\alpha)}R_{2m_1(\alpha)} \\
 & & + \sum\limits_{|\alpha|=2} \dfrac{1}{\alpha} Q_{2m_0}{}^{(\alpha)}R_{2m_1-1(\alpha)}
\end{array}
$$

La première relation est une identité.

La deuxième implique que $\mathcal{H}_0$ divise P_{2m-1} et en notant $P'_{2m_1-1} = \dfrac{P-2m-1}{\mathcal{H}_0}$, on a:

$$R_{2m_1-1} = P'_{2m_1-1} - Q_{2m_0-1}\mathcal{H}_1$$

La troisième se simplifie car P_{2m-1} et P_{2m-2} sont constants en x, pour $\tau = \lambda_j^0$ $(1 \leq j \leq m_0)$ on obtient une équation algébrique du deuxième degré d'inconnue $Q_{2m_0-1}(\lambda_j^0)$ qui s'écrit

$$\left\{\mathcal{H}_1(Q_{2m_0-1})^2 - P'_{2m_1-1}Q_{2m_0-1} + P_{2m-2}\right\}(\tau = \lambda_j^0, \xi) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m_0)$$

en cherchant des solutions constantes par rapport à x.

D'autre part $Q_{2m_0-1}(\tau = \lambda_j^0, \xi)$ doit être réel $(1 \leq j \leq m_0)$, d'où la condition de discriminant

$$\left\{(P'_{2m_1-1})^2 - 4\mathcal{H}_1 P_{2m-2}\right\}(\tau = \lambda_j^0, \xi) \geq 0$$

On en déduit alors la valeur de $Q_{2m_0-1}(\tau, \xi)$ polynôme réel de degré $m_0 - 1$ en τ et quasi-homogène de degré $2m_0 - 1$ en (τ, ξ) (symbole d'un opérateur différentiel en t et pseudo-difféntiel en x), et celle de $R_{2m_1-1}(\tau, \xi)$ polynôme réel de degré $m_1 - 1$ en τ et quasi-homogène de degré $2m_1 - 1$ en (τ, ξ).

La quatrième relation se simplifie aussi et s'écrit, en posant

$$P'_{2m_1-2} = \frac{\mathcal{H}_1(Q_{2m_0-1})^2 - P'_{2m_1-1}Q_{2m_0-1} + P_{2m-2}}{\mathcal{H}_0} = \mathcal{H}_1 Q_{2m_0-2} + R_{2m_1-2},$$

$$
\begin{aligned}
\Big\{P_{2m-3} - Q_{2m_0-1}(P'_{2m_1-2} - Q_{2m_0-2}\mathcal{H}_1) - Q_{2m_0-2}(P'_{2m_1-1} - Q_{2m_0-1}\mathcal{H}_1). \\
- \sum_{|\alpha|=1} \mathcal{H}_0{}^{(\alpha)}(P'_{2m_1-2(\alpha)} - \mathcal{H}_1 Q_{2m_0-2(\alpha)})\Big\}(\tau, \xi) \quad = 0
\end{aligned}
$$

au point $\tau = \lambda_j^0 \quad (1 \leq j \leq m_0)$.

Cette fois P_{2m-3} peut dépendre de x et on ne peut chercher une solution Q_{2m_0-2} indépendante de x: Q_{2m_0-2} est solution de l'équation différentielle

$$
\begin{aligned}
\Big\{ \sum_{|\alpha|=1} \mathcal{H}_0{}^{(\alpha)} Q_{2m_0-2(\alpha)} + Q_{2m_0-2}\left[2\mathcal{H}_1 Q_{2m_0-1} - P'_{2m_1-1}\right] \\
+ P_{2m-3} - Q_{2m_0-1}P'_{2m_1-2}\Big\}(\tau = \lambda_j^0, \xi) = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, m_0
\end{aligned}
$$

on obtient une solution Q_{2m_0-2} polynomiale de degré $m_0 - 1$ en τ et quasi-homogène de degré $2m_0 - 1$ en (τ, ξ).

On obtient aussi $R_{2m_1-2} = P'_{2m_1-2} - Q_{2m_0-2}\mathcal{H}_1$.

Remarque.

Si P_{2m-3} est à coefficients constants, on peut choisir les coefficients constants par en x, ce qui donne une équation linéaire en $Q_{2m_0-2}(\tau = \lambda_j^0)$:

$$\left\{Q_{2m_0-2}\left[2\mathcal{H}_1 Q_{2m_0-1} - P'_{2m_1-1}\right] + P_{2m-3} - Q_{2m_0-1}P'_{2m_1-2}\right\}(\tau = \lambda_j^0, \xi) = 0$$

$\forall\, j = 1, \ldots, m_0$.
Le coefficient $\left[2\mathcal{H}_1 Q_{2m_0-1} - P'_{2m_1-1}\right](\tau = \lambda_j^0, \xi)$ étant différent de 0 (d'après l'hypothèse iv)) on obtient $Q_{2m_0-2}(\tau = \lambda_j^0, \xi)$ $(\forall\, j = 1, \ldots, m_0)$ et par suite $Q_{2m_0-2}(\tau, \xi)$.

2.2 Preuve du théorème 1

On effectue la transformation suivante du problème de Cauchy (3) en posant

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} u_2(x,t) = u(x,t) \\ R(x, D_x, D_t)u_2(x,t) = u_1(x,t) \end{cases}$$

pour se ramener au système d'équations du type de J. Takeuchi d'inconnues u_1 et u_2:

$$\begin{cases} R(x, D_x, D_t)u_2(x,t) = u_1(x,t) \\ Q(x, D_x, D_t)u_1(x,t) = f(x,t) - \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} d_{k-1}(x, D_x)D_t^{m-1-k}u_2(x,t) \end{cases}$$

(les conditions A) et B) de Takeuchi sont vérifiées par Q et R).
On déduit les inégalités d'énergie suivantes:

$$\text{(7)} \quad \Big(\sum_{j=1}^{m-m_0} \big\| < D_x >^{2(m-m_0-j)} D_t^{j-1}u_2(.,t)\big\|_{(s)}^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq C(s,T)\Big\{\Big(\sum_{j=1}^{m-m_0} \big\| < D_x >^{2(m-m_0-j)} D_t^{j-1}u_2(.,0)\big\|_{(s)}^2\Big)^{1/2} +$$

$$+ \int_0^t \|u_1(.,\tau)\|_s d\tau\Big\}, \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

$$\text{(8)} \quad \Big(\sum_{j=1}^{m_0} \big\| < D_x >^{2(m_0-j)} D_t^{j-1}u_1(.,t)\big\|_{(s)}^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq C(s,T)\Big\{\Big(\sum_{j=1}^{m_0} \big\| < D_x >^{2(m_0-j)} D_t^{j-1}u_1(.,0)\big\|_{(s)}^2\Big)^{1/2} +$$

$$+ \int_0^t \|f(.,\tau)\|_s d\tau + \int_0^t \sum_{j=1}^{m-1} \big\|d_{k-1}(x, D_x)D_t^{m-1-k}u_2(.,\tau)\big\|_s d\tau\Big\}$$

(8) s'écrit:

$$(9) \quad \Big(\sum_{j=1}^{m_0} \| < D_x >^{2(m_0-j)} D_t^{j-1} u_1(.,t)\|_{(s)}{}^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq C'(s,T)\Big\{\Big(\sum_{j=1}^{m_0} \| < D_x >^{2(m_0-j)} D_t^{j-1} u_1(.,0)\|_{(s)}^2\Big)^{1/2} +$$

$$+ \int_0^t \|f(.,\tau)\|_s d\tau + \int_0^t \Big(\sum_{l=1}^{m-1} \Big\| < D_x >^{2(m-l-1)} D_t^{l-1} u_2(.,\tau)\Big\|_{(s)}^2\Big) d\tau\Big\}$$

En faisant le changement d'indices

$$l-1 = m-1-k, \qquad (k = m-l)$$

et en remarquant que les normes $\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|$ et $\Big(\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2\Big)^{1/2}$ sont équivalentes, par une récurrence sur n' on généralise l'inégalité (7) sous la forme

$$(10) \quad \Big\|D^{n'+m-m_0-1} u_2(.,t)\Big\|_{(s)} \leq C(s,T,n)\Big\{\Big\|D^{n'+m-m_0-1} u_2(.,0)\Big\|_{(s)} + \int_0^t \Big\|D^{n'} u_1(.,\tau)\Big\|_s d\tau\Big\}$$

où

$$\begin{aligned} \Big\|D^{n'} u(.,t)\Big\|_s &= \sup_{0\leq j\leq n'} \Big\|D_t^j u(.,t)\Big\|_{2(n'-j)+s} \\ &\sim \sum_{0\leq j\leq n'} \Big\|D_t^j u(.,t)\Big\|_{2(n'-j)+s} \\ &\sim \Big(Sum_{0\leq j\leq n'} \Big\|D_t^j u(.,t)\Big\|_{2(n'-j)+s}^2\Big)^{1/2} \end{aligned}$$

En prenant $n' = m_0 - 1$, on obtient

$$\Big(\sum_{j=0}^{m-2} \Big\| < D_x >^{2(m-2-j)} D_t^j u_2(.,t)\Big\|_s^2 \leq$$

$$\leq C\Big\{\Big(\sum_{j=0}^{m-2} \Big\| < D_x >^{2(m-2-j)} D_t^j u_2(.,0)\Big\|_s^2\Big)^{1/2} +$$

$$+ \int_0^t \Big(\sum_{j=0}^{m_0-1} \Big\| < D_x >^{2(m_0-1-j)} D_t^j u_1(.,\tau)\Big\|_s^2\Big)^{1/2} d\tau\Big\}$$

c'est à dire:

$$\Big(\sum_{k=1}^{m-1} \Big\| < D_x >^{2(m-1-k)} D_t^{k-1} u_2(.,t)\Big\|_s^2 \leq$$

$$\leq C\Big\{\Big(\sum_{k=1}^{m-1} \Big\| < D_x >^{2(m-1-k)} D_t^{k-1} u_2(.,0)\Big\|_s^2\Big)^{1/2} +$$

$$+ \int_0^t \Big(\sum_{k=1}^{m_0} \Big\| < D_x >^{2(m_0-k)} D_t^{k-1} u_1(.,\tau)\Big\|_s^2\Big)^{1/2} d\tau\Big\}$$

Dans le deuxième membre de cette inégalité on majore les termes en utilisant (9), la relation

$$\begin{aligned} u_1(x,0) &= R(x,D_x,D_t)u_2(x,0) \\ &= D_t^{m-m_0}u_2(x,0) + \sum_{l=1}^{m-m_0} c_l(x,D_x)D_t^{m-m_0-l}u_2(x,0) \end{aligned}$$

Puis à l'aide de l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\Big(\sum_{k=1}^{m-1}\Big\| < D_x >^{2(m-1-k)} D_t^{k-1}u_2(.,t)\Big\|_s^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq C(s,n,T)\Big\{\Big(\sum_{i=0}^{m-1}\Big\| < D_x >^{2(m-1-i)} D_t^{i}u_2(.,0)\Big\|_s^2\Big)^{1/2} +$$

$$+\int_0^t \|f(\tau)\|_s d\tau\Big\}$$

c'est à dire

$$\Big(\sum_{k=1}^{m-1}\Big\| < D_x >^{2(m-1-k)} D_t^{k-1}u(.,t)\Big\|_s^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq C(s,T)\Big\{\Big(\sum_{i=0}^{m-1}\Big\| < D_x >^{2(m-1-i)} D_t^{i}u(.,0)\Big\|_s^2\Big)^{1/2} +$$

$$+\int_0^t \|P(x,D_x,D_t)u(.,\tau)\|_s d\tau\Big\}$$

$\forall u \in C^0([-T,T],H^{2(m-1)+s}) \cap C^1([-T,T],H^{2(m-2)+s}) \cap \ldots C^{m-1}([-T,T],H^s)$.
Par les méthodes usuelles d'analyse fonctionnelle, on déduit l'existence et l'unicité d'une solution du problèmle de Cauchy (3) de cette inégalité d'énergie.

3 Systèmes 2×2 de Schrödinger avec racines caractéristiques doubles

3.1 Enoncé des résultats

Soit l'opérateur aux dérivées partielles matriciel 2×2 à coefficients constants $h(D_x,D_t)$ de 2-évolution

(11) $$h(D_x,D_t) = D_tI_2 - A(D_x)$$

où $A(D_x)$ est d'ordre 2 en x.
On fait les hypothèses suivantes.

i) La partie principale au sens de Petrowsky ([5]) est triangularisée sous la forme

$$H(\tau,\xi) = \begin{pmatrix} \tau - \lambda_0(\xi) & \mu_0(\xi) \\ 0 & \tau - \lambda_0(\xi) \end{pmatrix}$$

où $\lambda_0(\xi)$ et $\mu_0(\xi)$ sont deux formes quadratiques en ξ définies positives ou négatives.

ii) La partie sous principale H^* est une matrice 2×2 de formes linéaires en ξ à coefficients réels

$$H^*(\xi) = \begin{pmatrix} \alpha(\xi) & \beta(\xi) \\ \gamma(\xi) & \delta(\xi) \end{pmatrix}$$

iii) La partie quasi homogène de degrès 0 est une matrice 2×2 de constantes réelles

$$H^{**} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

Nous obtenons le

Théorème 2 *Si $\gamma = 0$ et $(\delta - \alpha)^2 + 4\mu^0\gamma'$ est une forme quadratique définie positive, alors le problème de Cauchy*

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} h(x, D_x, D_t)u(x,t) = f(x,t) \ sur\ \mathbb{R}^n \times [-T, T] \\ u(x,0) = u_0(x) \ dans\ \mathbb{R}^n \end{cases}$$

est bien posé pour le futur et le passé, i.e. *pour tout $u_0 \in [H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)]^2$ et pour tout $f \in [C^1([-T,T]), H^{+\infty}(\mathbb{R}^n)]^2$ il existe une solution unique $u \in [C^1([-T,T]), H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)]^2$ de (12) et de plus on a:*

$$\begin{aligned} \|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \; & C(T) \Big\{ \|v(0)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|v(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \\ & \int_0^t \Big(\|D_t hv(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|hv(s)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \Big) ds \Big\} \end{aligned}$$

$\forall t \in [-T,T]$, $\forall v \in C^2([-T,T], H^{-\infty}(\mathbb{R}^n))^2$.

Remarque.

$B_2^1(\lambda_0) = \mu_0(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \neq 0.$

Le polynôme sous caractéristique du système ([7])est

$$\mathcal{K} = \sum_{1 \leq i,j \leq 2} B_i^1 H^{*i}_{\ j} B_2^j = \beta(\tau - \lambda_0)^2 - \mu_0(\alpha + \delta)(\tau - \lambda_0) + \gamma\mu_0{}^2$$

Par conséquent

$$\gamma = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{K}(\tau = \lambda_0) = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{K} \text{ est divisible par } \mathcal{H}_0 = \tau - \lambda_0$$

et

$$(\delta - \alpha)^2 + 4\mu^0\gamma' > 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\mu_0^2}\left(\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{H}_0}\right)^2 (\tau = \lambda_0) - 4\alpha\delta + 4\mu_0\gamma' > 0.$$

La preuve du théorème 2 repose sur la proposition suivante.

Proposition 2 *Il existe $B^*(\xi)$ matrice 2×2 de formes linéaires en ξ et B^{**} matrice 2×2 de constantes, $Q(x,D_x,D_t)$ et $R(x,D_x,D_t)$ deux opérateurs de 2-évolution différentiels en t et pseudo différentiels en x de symbole principal commun $\mathcal{H}_0 I$, admettant des symnoles sous principaux réels indépendants de x, $d_0(x,D_x)\in BL^0(\mathbb{R}^n)$ ([1]) tels que*

$$
\begin{aligned}
(13)\qquad P &= h(D_x)\Big[B(D_x)+B^*(D_x)+B^{**}(D_x)\Big] \\
&= Q(x,D_x)R(x,D_x)+d_0(x,D_x)
\end{aligned}
$$

où $B(\xi,\tau)=\begin{pmatrix}\tau-\lambda_0 & -\mu_0\\ 0 & \tau-\lambda_0\end{pmatrix}=H^{cof}(\xi,\tau).$

3.2 Preuve de la proposition 2

En notant en indice inférieur l'ordre global pondéré comme à la section2, on décompose chaque opérateur $P=hb=h[B+B^*+B^{**}]$, Q et R:

$$P=\sum_{k=0}^{4},\quad Q=Q_2+Q_1+Q_0,\quad R=R_2+R_1+R_0$$

Alors (13) équivaut aux quatre relations matricielles suivantes:

$$
\begin{aligned}
(14)\quad P_4 &= HB=(\mathcal{H}_0)^2 I=\mathbb{Q}_2R_2\\
(15)\quad P_3 &= HB^*+HB=Q_2R_1+Q_1R_2\\
(16)\quad P_2 &= HB^{**}+H^*B^*+H^{**}B+\sum_{|\alpha|=1}H^{(\alpha)}B^*_{(\alpha)}=\\
&= Q_2R_0+Q_1R_1+Q_0R_2+\sum_{|\alpha|=1}Q_2^{(\alpha)}R_{1(\alpha)}\\
(17)\quad P_1 &= H^*B^{**}+H^{**}B^*+\sum_{|\alpha|=1}H^{(\alpha)}B^{**}_{(\alpha)}+\\
&\quad \sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}H^{(\alpha)}B^*_{(\alpha)}+\sum_{|\alpha|=1}H^{*(\alpha)}B^*_{(\alpha)}=\\
&= Q_1R_0+Q_0R_1+\sum_{|\alpha|=1}Q_2^{(\alpha)}R_{0(\alpha)}+\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}Q_2^{(\alpha)}R_{1(\alpha)}+\sum_{|\alpha|=1}Q_1^{(\alpha)}R_{1(\alpha)}
\end{aligned}
$$

$P_3=\begin{pmatrix}(\tau-\lambda_0)(b_{11}+\alpha)+b_{21}\mu^0 & (\tau-\lambda_0)(b_{12}+\beta)+\mu^0(b_{22}-\alpha)\\ (\tau-\lambda_0)(b_{21}+\gamma) & (\tau-\lambda_0)(b_{22}+\delta)-\mu^0\gamma\end{pmatrix}$ est divisible par $\mathcal{H}_0$ d'après (15) si et seulement si $b_{21}=0$, $b_{22}=\alpha$ et $\gamma=0$ en notant $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ et dans ces conditions

$$P_1'=\frac{P_3}{\mathcal{H}_0}=\begin{pmatrix}b_{11}+\alpha & b_{12}+\beta\\ 0 & \alpha+\delta\end{pmatrix}\quad et\quad B^*=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}=Q_1+R_1$$

$R_1 = P_1' - Q_1$ et on note $Q_1 = \begin{pmatrix} q_{11}^1 & q_{12}^1 \\ q_{21}^1 & q_{22}^1 \end{pmatrix}$, $B^{**} = \begin{pmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{21}^1 & c_{22}^1 \end{pmatrix}$.
La relation matricielle (16) s'écrit:

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} = (\tau - \lambda_0)(Q_0 + R_0)$$

D'où en choisissant q_{21}^1, q_{11}^1 et q_{22}^1 indépendants de x:

$$e_{21}(\tau = \lambda_0) = q_{21}^1(q_{11}^1 + q_{22}^1 - b_{11} - \alpha) = 0$$

que l'on peut résoudre par $q_{21}^1 = 0$,

$$e_{11}(\tau = \lambda_0) = (q_{11}^1)^2 - q_{11}^1(b_{11} + \alpha) + \mu^0 c_{21} + \alpha b_{11} = 0,$$

$$\begin{aligned} e_{12}(\tau = \lambda_0) \quad &= \quad q_{12}^1(q_{11}^1 + q_{22}^1 - \delta - \alpha) - q_{11}^1(b_{12} + \beta) + \mu_0(c_{22} - \alpha') \\ &\qquad + \alpha(b_{12} + \beta) + \sum_{\substack{|\Upsilon|=1 \\ \Upsilon \neq (1,0)}} \lambda_0^{\Upsilon} q_{12(\Upsilon)}^1 = 0 \end{aligned}$$

$$e_{12}(\tau = \lambda_0) = (q_{22}^1)^2 - q_{22}^1(\delta + \alpha) + \alpha\delta - \mu_0\gamma' = 0$$

On a ainsi quatre équations dont trois sont algébriques et l'avant dernière est différentielle car on choisit q_{12}^1 dépendant de x (et de ξ).
On résoud la dernière, ce qui donne une solution réelle q_{22}^1 si et seulement si $(\delta - \alpha) + 4\mu_0\gamma'$ est une forme quadratique positive (par exemple définie positive) ($e_{22} = 0$ *pour* $\tau = \lambda_0$).
On résout ensuite la deuxième (ici $e_{11} = 0$ *pour* $\tau = \lambda_0$)) et on aura une solution q_{11}^1 réelle si $(b_{11} - \alpha)^2 - 4\mu_0 c_{21}$ est une forme quadratique positive (par exemple définie positive) en choisissant b_{11} et c_{21} de façon adéquate.
L'équation $e_{12} = 0$ *pour* $\tau = \lambda_0$) se résout ensuite et donne q_{12}^1 réel: $q_{12}^1 = q_{12}^1(\xi)$.
On obtient de plus

$$P_0' = \frac{1}{\mathcal{H}_0} \begin{pmatrix} e - 11 & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} + \alpha' & c_{12} + \beta' \\ c_{21} + \gamma' & c_{22} + \delta' \end{pmatrix} = Q_0 + R_0$$

D'où $R_0 = P_0' - Q_0$ que l'on utilise dans (17).
(17) est un système différentiel régulier matriciel linéaire du premier ordre à coefficients non constants d'inconnue $Q_0 = \begin{pmatrix} q_{11}^0 & q_{12}^0 \\ q_{21}^0 & q_{22}^0 \end{pmatrix}$ qui se résout; on obtient alors $R_0 = P_0' - Q_0$.

3.3 Preuve du théorème 2

Pour résoudre (12) on pose $u(x,t) = b(D_x)y(x,t)$. y est alors solution de

$$\begin{cases} P(D_x)y(x,t) = f(x,t) & \\ \quad u_0(x) = (by)(0,t) & = \quad (D_t y)(0,t) - C(D_x)y(0,t) \\ & = \quad y_1(x) - C(D_x)y_0(x) \end{cases}$$

On peut choisir $y_0(x) = 0$ et $y_1(x) = u_0(x)$, d'où le problème de Cauchy

$$\begin{cases} P(D_x)y(x,t) = f(x,t) \\ y_0(x) = 0, \quad y_1(x) = u_0(x) \end{cases} \tag{18}$$

D'après la section 2, (18) est bien posé pour $f \in C^1([-T,T], H^{+\infty}(\mathbb{R}^n))$, $y_0 \in H^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$, $y_1 \in H^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$ $(m = 2)$.
Il existe une solution $y \in C^2([-T,T], H^{+\infty}(\mathbb{R}^n))$. De plus on a (cf th 1, $m = 2$ et [?] th1):

$$\begin{aligned}&\|D_t y(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|y(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &\leq C(0,T)\Big\{\|D_t y(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \| < D_x >^2 y(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + \|Py(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left|\int_0^t \|Py(.,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\tau\right|\Big\}\end{aligned}$$

Donc $u = by$ est solution de

$$\begin{cases} h(D_x)u = f \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

et il y a unicité de cette solution car l'adjoint h^* de h vérifie les mêmes hypothèses que celles sur h ($\gamma = 0$, $(\delta - \alpha)^2 + 4\mu_0\gamma'$ forme quadratique définie positive).
De plus on a l'inégalité (avec $v = bz$)

$$\begin{aligned}\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq C\Big\{\|D_t z\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|z(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}\Big\} \\ &\leq C(T)\Big\{\sum_{j=0}^{1} \|D_t^j(0)\|_{???} \\ &\quad + \|Pz(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_0^t \Big[\|D_t Py\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|Py\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}\Big](\tau)d\tau\Big\} \\ &\leq C(T)\Big\{\|v_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|hv(.,0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + \int_0^t \Big[\|D_t hv\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|hv\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}\Big](\tau)d\tau\Big\}\end{aligned}$$

en prenant $z(0) = 0$.

4 Systèmes 3×3 du type de Schrödinger à racines caractérisiques de multiplicités 2

4.1 Enoncé des résultats

Soit l'opérateur aux dérivées partielles matriciel 3×3 à coefficients constants $h(D_x, D_t)$ de 2-évolution

(19) $$h(D_x, D_t) = D_t I_3 - A(D_x)$$

où $A(D_x)$ est d'ordre 2 en x.
On fait les hypothèses suivantes:

(i) La partie principale est triangularisée sous la forme:

$$H(\tau,\xi) = \begin{pmatrix} \tau - \lambda_0(\xi) & \mu_0(\xi) & \mu_1(\xi) \\ 0 & \tau - \lambda_0(\xi) & \mu_2(\xi) \\ 0 & 0 & \tau - \lambda_1(\xi) \end{pmatrix}$$

avec λ_0, λ_1, μ_0, μ_1, μ_2 cinq formes quadratiques à coefficients réels constants telles que λ_0, λ_1, μ_0, $\mu_0 - \mu_1$ soient définies, positives ou négatives.

(ii) La partie sous principale

$$H^* = \begin{pmatrix} \alpha(\xi) & \beta(\xi) & \gamma(\xi) \\ \delta(\xi) & \varepsilon(\xi) & \varphi(\xi) \\ \psi(\xi) & \varrho(\xi) & \sigma(\xi) \end{pmatrix}$$

est formée de neuf formes linéaires à coefficients réels constants

(iii) La partie d'ordre 0 est formée de neuf constantes réelles

$$H^{**} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \delta' & \varepsilon' & \varphi' \\ \psi' & \varrho' & \sigma' \end{pmatrix}$$

La matrice des cofacteurs de H est

$$B = \begin{pmatrix} (\tau-\lambda_0)(\tau-\lambda_1) & -\mu_0(\tau-\lambda_1) & \mu_0\mu_2 - \mu_1(\tau-\lambda_0) \\ 0 & (\tau-\lambda_0)(\tau-\lambda_1) & -\mu_2(\tau-\lambda_0) \\ 0 & 0 & (\tau-\lambda_0)^2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme sous caractéristique est (cf [7])

$$\mathcal{K} = \sum_{1\leq i,j\leq 3} B_i^1 H^{*i}_{\ j} B_2^j, \qquad \text{car } B_2^1(\tau=\lambda_0) \neq 0.$$

En notant $\mathcal{H}_k = \tau - \lambda_k$ $(k=0,1)$ nous obtenons le

Théorème 3 *Si $\mathcal{K}$ est divisible par $\mathcal{H}_0$ ($\Longleftrightarrow \mu_2\psi - (\lambda_0-\lambda_1)\delta = 0$) et si*

$$\frac{1}{4\mu_0{}^2(\lambda_0-\lambda_1)^3}\left(\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{H}_0}\right)^2(\tau=\lambda_0) \quad > \quad \mu_0\left[\mu_2\psi' - (\lambda_0-\lambda_1)\delta'\right] + \mu_0(\varphi\psi - \sigma\delta) \\ +\rho(\delta\mu_1 - \alpha\mu_2) + \alpha\varepsilon(\lambda_0-\lambda_1)$$

alors le problème de Cauchy

$$(20) \qquad \begin{cases} hu = f & sur \ \mathbb{R}^n \times [-T,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & sur \ \mathbb{R}^n \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in C^1([-T,T], H^{+\infty}(\mathbb{R}^n))$ lorsque $u_0 \in H^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$ et $f \in C^1([-T,T], H^{+\infty}(\mathbb{R}^n))$, et on a la même inégalité d'énergie que dans le théorème 2.

La preuve de ce théorème est la conséquence de la proposition suivante:

Proposition 3 *Il existe des opérateurs différentiels en t et pseudo différentiels en x, à coefficients constants:*

$B^* = \left[b_{ij}\right]_{1\leq i,j\leq 3}$ *d'ordre pondéré 3 en (τ,ξ),*

$B^{**} = \left[c_{ij}\right]_{1\leq i,j\leq 3}$ *d'ordre pondéré* 2,
$B^{***} = \left[d_{ij}\right]_{1\leq i,j\leq 3}$ *d'ordre pondéré* 1,
$B^{****} = \left[e_{ij}\right]_{1\leq i,j\leq 3}$ *d'ordre pondéré* 0,

Q et R opérateurs de 2-évolutions différentiels en t et pseudo différentiels en x de symboles principaux respectifs $Q_2 = \mathcal{H}_0 I$ et $R_4 = \mathcal{H}_0\mathcal{H}_1 I$ à coefficients variables, $D(x,\tau,\xi)$ d'ordre pondéré 2 en (τ,ξ) tels que.

$$(21)\qquad P = h(D_X)b(D_X) = h(D_X)\Big[B(D_X) + B^{*}(D_X) + B^{**}(D_X) + B^{***}(D_X) + B^{****}(D_X)\Big] = Q(x,D_X)R(x,D_X) + D(x,D_X)$$

avec

$$\begin{array}{l} Q = \mathcal{H}_0 I + Q_1 + Q_0 \\ R = \mathcal{H}_0\mathcal{H}_1 I + R_3 + R_2 + R_1 + R_0 \\ D = d_0(x,D_x)D_t + d_1(x,D_x) \\ d_0(x,D_x) \in BL^0(\mathrm{I\!R}^n), \quad d_1(x,D_x) \in BL^2(\mathrm{I\!R}^n) \end{array}$$

4.2 Preuve de la proposition 3

(21) équivaut aux quatre relations matricielles suivantes

$$(22)\qquad P_6 = HB = Q_2 R_4 = {\mathcal{H}_0}^2\mathcal{H}_1 I$$

$$(23)\qquad P_5 = HB^* + H^*B = Q_2R_3 + Q_1R_4 = \mathcal{H}_0(R_3 + \mathcal{H}_1 Q_1)$$

$$(24)\qquad \begin{aligned} P_4 &= Hb^{**} + H^*B^* + H^{**}B + \sum_{|\Upsilon|=1} H^{(\Upsilon)}B^{*}{}_{(\Upsilon)} \\ &= Q_2R_2 + Q_1R_3 + Q_0R_4 + \sum_{|\Upsilon|=1} {Q_2}^{(\Upsilon)}R_{3(\Upsilon)} \end{aligned}$$

$$(25)\qquad \begin{aligned} P_3 &= HB^{***} + H^*B^{**} + H^{**}B^* + H^{***}B \\ &\quad + \sum_{|\Upsilon|=1} H^{(\Upsilon)}B^{**}{}_{(\Upsilon)} + \sum_{|\Upsilon|=2}\frac{1}{\Upsilon!}H^{(\Upsilon)}B^{*}{}_{(\Upsilon)} + \sum_{|\Upsilon|=1} H^{*(\Upsilon)}B^{*}{}_{(\Upsilon)} \\ &= Q_2R_1 + Q_1R_2 + Q_0R_3 + \sum_{|\Upsilon|=1}{Q_2}^{(\Upsilon)}R_{2(\Upsilon)} + \sum_{|\Upsilon|=2}\frac{1}{\Upsilon!}{Q_2}^{(\Upsilon)}R_{3(\Upsilon)} + \sum_{|\Upsilon|=1}{Q_1}^{(\Upsilon)}R_{3(\Upsilon)} \end{aligned}$$

(23) implique $P_5(\tau = \lambda_0) = 0$, ce qui équivaut en notant $b_{ij} = b^1_{ij}(\xi)(\tau - \lambda_0) + b^3_{ij}\quad (\forall\, i,j)$ les neuf égalités

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_0 b^3_{21} + \mu_1 b^3_{31} = 0 \\ \mu_0 b^3_{22} + \mu_1 b^3_{32} - \alpha\mu_0(\lambda_0 - \lambda_1) = 0 \\ \mu_0 b^3_{23} + \mu_1 b^3_{33} + \alpha\mu_0\mu_2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \mu_2 b^3_{31} = 0 \\ \mu_2 b^3_{32} - \mu_0\delta(\lambda_0-\lambda_1) = 0 \\ \mu_2 b^3_{33}\delta\mu_0\mu_2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (\lambda_0-\lambda_1)b^3_{31} = 0 \\ (\lambda_0-\lambda_1)b^3_{32} - \mu_0\psi(\lambda_0-\lambda_1) = 0 \\ (\lambda_0-\lambda_1)b^3_{33} + \psi\mu_0\mu_2 \end{cases}$$

ceci entraîne les égalités

$$\begin{cases} \mu_2\psi = \delta(\lambda_0-\lambda_1) \\ b^3_{21} = 0,\ b^3_{22} = -\mu_1\psi + \alpha(\lambda_0-\lambda_1),\ b^3_{23} = -\alpha\mu_2 + \delta\mu_1 \\ b^3_{31} = 0,\ b^3_{32} = \mu_0\psi,\ b^3_{33} = -\delta\mu_0 \end{cases}$$

et b^3_{11}, b^3_{12}, b^3_{13}, b^1_{ij} $(1 \leq i,j \leq 3)$ indéterminés et

$$P'_3 = \frac{P_5}{\mathcal{H}_0} = \frac{HB^* + H^*B}{\mathcal{H}_0} = Q_1H_1 + R_3$$

$R_3 = P'_3 - Q_1\mathcal{H}_1$ avec

$$P'_3 = \begin{pmatrix} \begin{cases} b_{11} + \alpha(\tau-\lambda_1) \\ +\mu_0 b^1_{21} + \mu_1 b^1_{31} \end{cases} & \begin{cases} b_{12} - \alpha\mu_0 + \beta(\tau-\lambda_1) \\ \quad +\mu_0 b^1_{22} + \mu_1 b^1_{32} \end{cases} & \begin{cases} b_{13} - \alpha\mu_1 - \beta\mu_2 + \mu_0 b^1_{23} \\ +\mu_1 b^1_{33} + \gamma(\tau-\lambda_0) \end{cases} \\ b_{21} + \delta(\tau-\lambda_1) + \mu_2 b^1_{31} & \begin{cases} b_{22} - \delta\mu_0 + \varepsilon(\tau-\lambda_1) \\ +\mu_2 b^1_{32} \end{cases} & \begin{cases} b_{23} - \delta\mu_1 - \varepsilon\mu_2 + \mu_2 b^1_{33} \\ +\varphi(\tau-\lambda_0) \end{cases} \\ b^1_{31}(\tau-\lambda_1) + \psi(\tau-\lambda_1) & b^1_{32}(\tau-\lambda_1) + \varrho(\tau-\lambda_1) & \begin{cases} b^1_{33}(\tau-\lambda_1) - \delta\mu_0 - \psi\mu_1 \\ -\varrho\mu_2 + \sigma(\tau-\lambda_0) \end{cases} \end{pmatrix}$$

Ecrivons (24) sous la forme

$$\begin{aligned} P_4 = HB^{**} + H^*B^* + H^{**}B \quad &= \quad Q_1(P'_3 - Q_1H_1) + H_0(R_2 + Q_0H_1) \\ &+ \sum_{|\Upsilon|=1} \mathcal{H}_0{}^{(\Upsilon)}(P'_{3(\Upsilon)} - \mathcal{H}_1 Q_{1(\Upsilon)}) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} \begin{cases} c_{11}(\tau-\lambda_0) + \mu_0 c_{21} + \\ \mu_1 c_{31} \end{cases} & \{ c_{12}(\tau-\lambda_0) + \mu_0 c_{22} + +\mu_1 c_{32} & \{ c_{13}(\tau-\lambda_0) + \mu_0 c_{23} + +\mu_1 c_{33} \\ c_{21}(\tau-\lambda_0) + \mu_2 c_{31} & c_{22}(\tau-\lambda_0) + \mu_2 c_{32} & c_{23}(\tau-\lambda_0) + \mu_2 c_{33} \\ c_{31}(\tau-\lambda_1) & c_{32}(\tau-\lambda_1) & c_{33}(\tau-\lambda_1) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \alpha'(\tau-\lambda_0)(\tau-\lambda_1) & \begin{cases} \alpha'(-\mu_0)(\tau-\lambda_1) + \\ +\beta'(\tau-\lambda_0)(\tau-\lambda_1) \end{cases} & \begin{cases} \alpha'(\mu_0\mu_2 - \mu_1(\tau-\lambda_0)) + \\ +\beta'(-\mu_2(\tau-\lambda_0)) + \gamma'(\tau-\lambda_0)^2 \end{cases} \\ \delta'(\tau-\lambda_0)(\tau-\lambda_1) & \begin{cases} \delta'(-\mu_0)(\tau-\lambda_1) + \\ +\varepsilon'(\tau-\lambda_0)(\tau-\lambda_1) \end{cases} & \begin{cases} \delta'(\mu_0\mu_2 - \mu_1(\tau-\lambda_0)) + \\ +\varepsilon'(-\mu_2(\tau-\lambda_0)) + \varphi'(\tau-\lambda_0)^2 \end{cases} \\ \psi'(\tau-\lambda_0)(\tau-\lambda_1) & \begin{cases} \psi'(-\mu_0)(\tau-\lambda_1) + \\ +\varrho'(\tau-\lambda_0)(\tau-\lambda_1) \end{cases} & \begin{cases} \psi'(\mu_0\mu_2 - \mu_1(\tau-\lambda_0)) + \\ +\varrho'(-\mu_2(\tau-\lambda_0)) + \sigma'(\tau-\lambda_0)^2 \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \varphi \\ \psi & \varrho & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{|\Upsilon|=1} \lambda_0{}^{(\Upsilon)}(\tau - \lambda_1)Q_{1(\Upsilon)} - (\tau - \lambda_1)(Q_1)^2 + (\tau - \lambda_0)(R_2 + Q_0\mathcal{H}_1) +$$

$$\begin{pmatrix} \begin{cases} b_{11} + \alpha(\lambda_0 - \lambda_1) + \alpha(\tau - \lambda_1) \\ +\mu_0 b^1_{21} + \mu_1 b^1_{31} \end{cases} & \begin{cases} b_{12} - \alpha\mu_0 + \beta(\lambda_0 - \lambda_1) \\ +\beta(\tau - \lambda_1) + \mu_0 b^1_{22} + \mu_1 b^1_{32} \end{cases} & \begin{cases} b_{13} - \alpha\mu_1 - \beta\mu_2 + \mu_0 b^1_{23} \\ +\mu_1 b^1_{33} + \gamma(\tau - \lambda_0) \end{cases} \\ \begin{cases} b_{21} + \delta(\lambda_0 - \lambda_1) + \\ +\delta(\tau - \lambda_1) + \mu_2 b^1_{31} \end{cases} & \begin{cases} b_{22} - \delta\mu_0 + \varepsilon(\tau - \lambda_1) \\ +\mu_2 b^1_{32} \end{cases} & \begin{cases} b_{23} - \delta\mu_1 - \varepsilon\mu_2 + \mu_2 b^1_{33} \\ +\varphi(\tau - \lambda_0) \end{cases} \\ \begin{cases} b^1_{31}(\tau - \lambda_1) + \psi(\tau - \lambda_1) \\ \psi(\lambda_0 - \lambda_1) \end{cases} & \begin{cases} b^1_{32}(\tau - \lambda_1) + \varrho(\lambda_0 - \lambda_1) \\ +\varrho(\tau - \lambda_1) \end{cases} & \begin{cases} b^1_{33}(\tau - \lambda_1) - \delta\mu_0 - \psi\mu_1 \\ -\varrho\mu_2 + \sigma(\tau - \lambda_0) \end{cases} \end{pmatrix}$$

On considère l'équation matricielle précédente lorsque $\tau = \lambda_0$.
On rend cette équation matricielle d'inconnue $Q_1 = Q_1(\xi)$ triangulaire supérieur pour la résoudre en agissant sur $C = B^{**}$ et sur b^1_{31} et b^1_{32} et en choisissant $Q_1(\xi)$ triangulaire supérieure. Dans cette équation, pour que le coefficient de Q_1 soit triangulaire supérieur, il faut et il suffit que

$$b^1_{32}(\lambda_0 - \lambda_1) + \varrho(\lambda_0 - \lambda_1) = 0 \Longrightarrow b^1_{32} = -\varrho$$

$$b^1_{31}(\lambda_0 - \lambda_1) + \psi(\lambda_0 - \lambda_1) = 0 \Longrightarrow b^1_{31} = -\psi$$

$b^3_{21} + \delta(\lambda_0 - \lambda_1) - \mu_2\psi = 0$ est une équation trivialement vérifiée car $b^3_{21} = 0$ et $\delta(\lambda_0 - \lambda_1) - \mu_2\psi = 0$.
D'autre part, pour que le coefficient matriciel constant vis à vis de Q_1 dans l'équation matricielle précédente soit triangulaire il faut et il suffit que

$$\begin{aligned} &c_{32}(\lambda_0 - \lambda_1) - \mu_0\psi'(\lambda_0 - \lambda_1) + \psi b^3_{12} + \varrho b^3_{22} + \sigma b^3_{32} = 0 \\ &c_{31}(\lambda_0 - \lambda_1) + \psi b^3_{11} + \varrho b^3_{21} + \sigma b^3_{31} = 0 \\ &\mu_2 c_{31} + \delta b^3_{11} + \varepsilon b^3_{21} + \varphi b^3_{31} = 0 \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} c_{32} = \mu_0\psi' - \varrho\alpha - \dfrac{\psi}{(\lambda_0 - \lambda_1)} b^3_{12} + \dfrac{\psi(\varrho\mu_1 - \sigma\mu_0)}{(\lambda_0 - \lambda_1)} \\ c_{32} = -\dfrac{\psi}{(\lambda_0 - \lambda_1)} b^3_{11} \end{cases}$$

On peut alors résoudre cette équation matricielle triangulaire supérieur d'inconnue Q_1 en commençant par les termes diagonaux.
On choisit les termes diagonaux q_{11}, q_{22}, q_{33} constants vis à vis de x; il doivent alors vérifier des équations algébriques du second degré:

$1^{\text{ère}}$ ligne $1^{\text{ère}}$ colonne:

$$\left(\alpha - \delta\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) b^3_{11} + \mu_0 c_{21} - q_{11}\left[b^3_{11} + \alpha(\lambda_0 - \lambda_1) + \mu_0 b^1_{21} - \psi\mu_1\right] + (\lambda_0 - \lambda_1)(q_{11})^2 = 0$$

qui a une solution réelle (en agissant sur b^3_{11} et c_{21} et b^1_{21}).

$2^{\text{ième}}$ ligne $2^{\text{ième}}$ colonne:

$$\begin{aligned} 0 = \; & \mu_2(\mu_0\psi' - \varrho\alpha) + \delta(\varrho\mu_1 - \sigma\mu_0) - \delta'\mu_0(\lambda_0 - \lambda_1) + \varepsilon(-\mu_1\psi + \alpha(\lambda_0 - \lambda_1)) \\ & + \varphi\psi\mu_0 - q_{22}\left[-\delta\mu_0 - \psi\mu_1 - \varrho\mu_2 + (\alpha + \varepsilon)(\lambda_0 - \lambda_1)\right] + (\lambda_0 - \lambda_1)(q_{22})^2 \end{aligned}$$

qui a une solution réelle si le discriminant est ≥ 0

$$\iff \frac{1}{4{\mu_0}^2(\lambda_0-\lambda_1)^3}\left(\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{H}_0}\right)^2(\tau=\lambda_0) \geq \mu_0\left[\mu_2\psi'-(\lambda_0-\lambda_1)\delta'\right]+ +\mu_0(\varphi\psi-\sigma\delta)+\varrho(\delta\mu_1-\alpha\mu_2)+\alpha\varepsilon(\lambda_0-\lambda_1)$$

$3^{\text{ième}}$ ligne $3^{\text{ième}}$ colonne:

$$\begin{aligned} 0= \; & c_{33}(\lambda_0-\lambda_1)+\psi'\mu_0\mu_2+\psi b^3_{13}+\varrho(-\alpha\mu_2+\delta\mu_1)-\sigma\delta\mu_0 \\ & -q_{33}\left[b^1_{33}(\lambda_0-\lambda_1)-\psi\mu_1-\varrho\mu_2-\delta\mu_0\right]+(\lambda_0-\lambda_1)(q_{33})^2 \end{aligned}$$

cette équation a une solution réelle q_{33} en agissant sur b^1_{33}, b^3_{13} et c_{33}.
Il reste trois équations à résoudre dans (24), avec

$$Q_1=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & q_{33} \end{pmatrix}$$

Cette fois on choisit q_{12}, q_{13}, q_{23} à coefficients variables en x, ce qui donne des équations différentielles linéaires du premier ordre à résoudre.

$1^{\text{ière}}$ ligne $2^{\text{ième}}$ colonne:

$$\begin{aligned} 0= \; & q_{12}\left\{(\lambda_0-\lambda_1)(q_{11}+q_{22}+\alpha+\varepsilon)-\varrho\mu_2-\psi\mu_1-\delta\mu_0\right\} \\ & -q_{11}\left\{b^3_{12}-\alpha\mu_0+\beta(\lambda_0-\lambda_1)+\mu_0 b^1_{22}+\mu_1 b^1_{32}\right\}+\mu_0 c_{22}+\mu_1 c_{32}-\alpha'\mu_0(\lambda_0-\lambda_1) \\ & +\alpha b^3_{12}+\beta b^3_{22}=\gamma b^3_{32}-\sum_{|\Upsilon|=1}{\lambda_0}^{(\Upsilon)}(\lambda_0-\lambda_1)q_{12(\Upsilon)} \end{aligned}$$

D'où $q_{12}(x,\xi)$.

$2^{\text{ième}}$ ligne $3^{\text{ième}}$ colonne:

$$\begin{aligned} 0= \; & q_{23}\left\{(\lambda_0-\lambda_1)(q_{22}+q_{33}-b^1_{33}+\psi\mu_1+\varrho\mu_2-\delta\mu_0\right\}+\mu_2 c_{33}+\delta'\mu_0\mu_2+\delta b^3_{13} \\ & +\varepsilon b^3_{23}+\varphi b^3_{33}-q_{22}\left(b^3_{23}-\delta\mu_1-\varepsilon\mu_2+\mu_2 b^1_{33}\right)-\sum_{|\Upsilon|=1}{\lambda_0}^{(\Upsilon)}(\lambda_0-\lambda_1)q_{23(\Upsilon)} \end{aligned}$$

D'où $q_{23}(x,\xi)$.

$1^{\text{ière}}$ ligne $3^{\text{ième}}$ colonne:

$$\begin{aligned} 0= \; & q_{13}\left\{(q_{11}+q_{33}-b^1_{33})(\lambda_0-\lambda_1)+\psi\mu_1+\varrho\mu_2-\delta\mu_0\right\}+q_{12}q_{23}(\lambda_0-\lambda_1) \\ & +\mu_0 c_{23}+\mu_1 c_{33}+\alpha'\mu_0\mu_2\alpha b^3_{13}+\beta b^3_{23}+\gamma b^3_{33}-q_{11}\left(b^3_{13}-\alpha\mu_1-\beta\mu_2+\mu_0 b^1_{23}+\mu_1 b^1_{33}\right) \\ & -q_{12}\left(b^3_{23}-\delta\epsilon\mu_2+\mu_2 b^1_{33}\right)-\sum_{|\Upsilon|=1}{\lambda_0}^{(\Upsilon)}(\lambda_0-\lambda_1)q_{13(\Upsilon)} \end{aligned}$$

D'où $q_{13}(x,\xi)$.
Ecrivons (25). D'après (24) on a

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{HB^{**}+H^*B^*-Q_1P'_3+(Q_1)^2\mathcal{H}_1-\sum_{|\Upsilon|=1}{\lambda_0}^{(\Upsilon)}(\lambda_0-\lambda_1)Q_{1(\Upsilon)}}{\mathcal{H}_0}-Q_0\mathcal{H}_1 \\ &= P'_2-Q_0\mathcal{H}_1 \end{aligned}$$

Donc (25) s'écrit

$$\begin{aligned} P_1' &= HB^{***} + H^*B^{**} + H^{**}B^* - Q_1(P_2' - \mathcal{H}_1 Q_0) - Q_0(P_3' - Q_1\mathcal{H}_1) \\ &\quad - \sum_{|\Upsilon|=1} \mathcal{H}_0{}^{(\Upsilon)}(P'_{2(\Upsilon)} - \mathcal{H}_1 Q_{0(\Upsilon)}) - \sum_{|\Upsilon|=2} \frac{1}{\Upsilon!}\mathcal{H}_0{}^{(\Upsilon)}(P'_{3(\Upsilon)} - \mathcal{H}_1 Q_{1(\Upsilon)}) \\ &\quad - \sum_{|\Upsilon|=1} Q_1{}^{(\Upsilon)}(P'_{3(\Upsilon)} - \mathcal{H}_1 Q_{1(\Upsilon)}) = \mathcal{H}_0 R_1. \end{aligned}$$

Pour $\tau = \lambda_0$, on obtient un système différentiel linéaire régulier d'ordre un et d'inconnue Q_0, d'où Q_0.
Pour cette valeur de Q_0, on obtient P_1' divisible par $\mathcal{H}_0$ et $\dfrac{P_1'}{\mathcal{H}_0}$ donne la valeur de R_1 en fonction linéaire de B^{***}, B^{**} et B^*.

La proposition 3 est démontrée.

Avec cette proposition 3 on obtient le théorème 3 comme à la section 3 précédente en constatant que les hypothèses sont invariantes par passage à l'adjoint h^* de h.

5 Systèmes $(N+2)\times(N+2)$ du type de Schrödinger d'ordre quelconque à racines caractéristiques de multiplicité deux

Soit

$$h(x, D_x) = D_t^m I_{N+2} + \sum_{k=1}^{m} A_k(x, D_x) D_t^{m-k}$$

une matrice $(N+2)\times(N+2)$ d'opérateurs différentiels avec $A_j(x, D_x) = \sum_{|\alpha|\le 2j} A_{\alpha j}(x) D_x^\alpha$, $A_{\alpha j} \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

On fait les hypothèses suivantes

1) La partie principale $H(\xi,\tau) = A'_{2m}$ quasi homogène de degré $2m$ au sens de Petrowsky est à coefficients réels constants et s'écrit

$$H(\xi,\tau) = \tau^m I_{N+2} + \sum_{j=1}^{m} A_j^0(\xi)\tau^{m-j}$$

$$A_j^0(\xi) = \sum_{|\alpha|=2j} A_{\alpha j}\xi^\alpha$$

$$H = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_0 & K & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{H}_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & \mathcal{H}_N \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_0 = \prod_{j=1}^{m}(\tau - \lambda_j),\ \mathcal{H}_1 = \prod_{j=m+1}^{2m}(\tau - \lambda_j),\ \ldots,\ \mathcal{H}_N = \prod_{j=Nm+1}^{(N+1)m}(\tau - \lambda_j)$$

$$K = \mu_0(\xi)\prod_{j=1}^{m-1}(\tau - \mu_j),$$

λ_j $(1 \le j \le (N+1)m)$ et μ_j $(0 \le j \le m-1)$ sont des formes quadratiques telles que λ_j $(1 \le j \le (N+1)m)$, $(\lambda_j - \lambda_k)$ $(j \ne k)$, μ_0, $(\mu_j - \mu_k)$ $(1 \le j \le m,\ 1 \le k \le m-1)$ soient définies positives ou négatives.

2) Les parties quasi homogènes H^* de degré $2m-1$ (partie sous principale) et H^{**} de degré $2m-2$ sont à coefficients réels constants et $\mathcal{H}_0$ divise le polynôme sous caractéristique

$$\mathcal{K} = \sum_{1 \le A,B \le N+2} B_{1A} H^*_{AB} B_{B2}$$

dans $\mathbb{R}[\xi, \tau]$ où $B = H^{cof}$ est la matrice des cofacteurs de H.

3) $\mathcal{K} = \mathcal{H}_0 \mathcal{K}'$

$$\left[\frac{\mathcal{K}'}{K\prod_{i=1}^{N}\mathcal{H}_i}\right]^2(\tau = \lambda_l) >$$
$$\Big\{4\prod_{i=1}^{N}\mathcal{H}_i\Big[-H^{**}_{21}K\prod_{i=1}^{N}\mathcal{H}_i + H^*_{22}H^*_{11}\prod_{i=1}^{N}\mathcal{H}_i + \sum_{j=3}^{N+2}H^*_{2j}H^*_{j1}K\prod_{\substack{k=1\\k\ne j,k\ne l}}^{N}\mathcal{H}_k\Big]\Big\}(\tau = \lambda_l).$$

$\forall l = 1, \ldots, m,$

Nous obtenons le théorème suivant:

Théorème 4 *Sous les hypothèses* **1)**, **2)** *et* **3)**, *pour tout* $\phi_0, \ldots \phi_{m-1}$ *dans* $\left[H^{+\infty}(\mathbb{R}^n)\right]^{N+2}$ *et* f *dans* $C^1([-T,T], \left[H^{+\infty}(\mathbb{R}^n)\right]^{N+2})$, *il existe une solution unique* $U(x,t)$ *du problème de Cauchy pour le futur et le passé*

$$\text{(26)}\qquad \begin{cases} h(x, D_x)U(X) = f(X) \\ U(x,0) = \phi_0,\ \ldots,\ D_t^{m-1}U(x,0) = \phi_{m-1}(x) \end{cases}$$

De plus on a l'inégalité d'énergie suivante: $U \in C^m([-T,T], \left[H^{+\infty}(\mathbb{R}^n)\right]^{N+2})$

$$\Big(\sum_{k=1}^{m-1}\Big\| <D_x>^{2(m-1-k)}D_t^{k-1}U(.,t)\Big\|_s^2\Big)^{1/2} \le C(s,T)\Big\{\Big(\sum_{k=0}^{m-1}\big\|<D_x>^{2(m-1-k)}D_t^k U(.,0)\big\|_s^2\Big)^{1/2} + \Big|\int_0^t \|h(x,D_x)U(.,\tau)\|_s d\tau\Big|\Big\}$$

en démontrant la proposition suivante

Proposition 4 *Les conditions* **1)**, **2)** *et* **3)** *équivalent à l'existence d'opérateurs différentiels en t et pseudo différentiels en x dans* $\mathcal{B}L^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$*:*
$b(D_x) = B(D_x) + B^*(D_x) + B^{**}(D_x)$, $Q(x, D_x)$, $R(x, D_x)$ *avec*

$$B^*(\tau,\xi) = \sum_{k=1}^{\mu-m} B_k^1(\xi)\tau^{\mu-m-k}$$

$$B_k^1(\xi) = \sum_{|\alpha|=2k-1} B_{\alpha,k}\xi^\alpha$$

$$B^{**}(\tau,\xi) = \sum_{k=1}^{\mu-m} B_k^2(\xi)\tau^{\mu-m-k}$$

$$B_k^2(\xi) = \sum_{|\alpha|=2k-2} B_{\alpha,k}\xi^\alpha$$

$Q(x, D_x)$ *de symbole principal* $\mathcal{H}_0 I_{N+2}$,

$R(x, D_x)$ *de symbole principal* $\prod_{k=0}^{N} \mathcal{H}_k I_{N+2}$,

tels que

$$P = hb = QR + \sum_{k=0}^{\mu-2} d_k(x, D_x) D_t^{\mu-2-k} \tag{27}$$

avec $d_k \in \mathcal{B}L^{2k}(\mathbb{R}^n)$ $(0 \le k \le \mu-2)$ *et* $\mu = (N+2)m$.
de la même manière qu'à la section 4.

Références

[1] J. Chazarain, A. Piriou, Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires, Gauthier Villars, 1981, Collection $\mu\beta$.

[2] D. Gourdin, M. Mechab, Propagation des singularités et opérateurs différentiels. J. Vaillant ed., Travaux en Cours, Hermann, 1985, p. 121-147.

[3] D. Gourdin, S. Ngnosse, J. Takeuchi, Problème de Cauchy pour certaines équations du type Schrodinger, C. R. Acad. Sc. Paris, T. 324, série I, 1997, p. 1111-1116.

[4] D. Gourdin, S. Ngnosse, J. Takeuchi, Problème de Cauchy pour certaines équations du type Schrodinger,, à racines caractéristiques multiples. A paraître

[5] I. Petrowsky, Uber das Cauchysche problem fur ein system linearer partieller differentialgleichungen im gebeit der nichanalytischen functionen, Bull. Univ. Etat, Moscou, Ser. Int., Sect. A, Fasc. 7, (1), 1938, p. 1-74.

[6] J. Takeuchi, Thèse de doctorat de l'université Paris 6, 1995.

[7] J. Vaillant, Données de Cauchy portées par une caractéristique double dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles, rôle des bicaractéristiques, J. Math. Pures et Appl., IX, 47, 1968, p. 1-40.